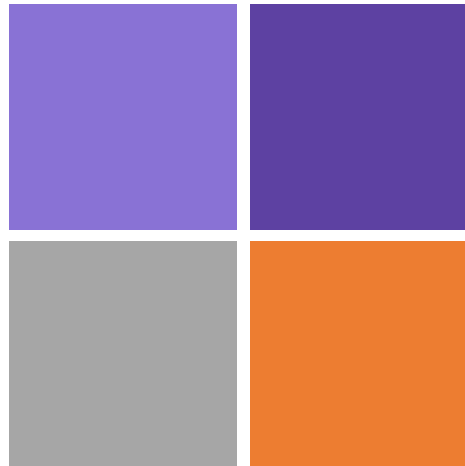


Semaine 2:

Contraintes et Déformations relatives en 3D



Partie I: Contraintes en 3D

1. Forces internes en 3D
2. Contraintes normales et de cisaillement en 3D
3. Conventions et réciprocity
4. Matrice de contraintes

Partie II: Déformation relative

1. Rappel déformation relative en 1D
2. Déformation relative en 3D
3. Matrice de déformations relatives

Partie III: Loi de Hooke en 3D

1. L'effet de Poisson
2. Loi de Hooke généralisée
3. Matrices de souplesse et de rigidité
4. Equilibre en 3D

Questions ?

Quiz Session: micro200

<https://tppoll.eu> or turnpoint app



- Durant les séances d'exercices en classe
- Par courriel: danick.briand@epfl.ch

Programme du cours

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
Danick Briand				
1	09.09	1. Intro des 3 enseignants 2. Rappel bases statique et diagramme des forces	x	
1	11.09	Contraintes 1D	x	Série 1
2	16.09	Contraintes	x	Série 1
2	18.09	Contraintes	x	Série 2
3	23.09	Déformation	x	Série 2
3	25.09	Déformation	x	Série 3
4	30.09	Transformation	x	Série 3
4	02.10	Transformation	x	Série 4
5	07.10	Torsion	x	Série 4
5	09.10	Torsion	x	Série 5
Dimitrios Karampinos				
6	14.10	Forces internes, contrainte normale en flexion	x	
6	16.10	Composite axe neutre	x	Série 6
7	28.10	Cisaillement et poutre flèche	x	Série 6

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
7	30.10	Quiz + Session questions & réponses D. Briand		Série 1-5
8	04.11	Examen mi-semestre D. Briand		
8	06.11	Poutre flèche suite	x	Série 7
9	11.11	Guidage flexible	x	Série 7
9	13.11	Systèmes indéterminés et thermiques	x	Série 8
10	18.11	Systèmes indéterminés et Flambage	x	Séries 8-9
10	20.11	Flambage	x	Série 9
Simon Henein				
11	25.11	Ressorts	x	Série 10
11	27.11	Guidages flexibles	x	Série 11
12	02.12	Guidages flexibles	x	Série 11
12	04.12	Guidages flexibles	x	Série 11
13	09.12	Transmissions	x	Série 12
13	11.12	Transmissions	x	Série 12
14	16.12	Engrenages	x	Série 13
14	18.12	Accouplements	x	Série 14

Jeudi 18.09 : Cours en CE 1106 & sur Zoom

Exercices en CE 1106 & BS 260

Séances d'exercices

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
Danick Briand				
1	09.09	1. Intro des 3 enseignants 2. Rappel bases statique et diagramme des forces	x	
1	11.09	Contraintes 1D	x	Série 1
2	16.09	Contraintes	x	Série 1
2	18.09	Contraintes	x	Série 2
3	23.09	Déformation	x	Série 2
3	25.09	Déformation	x	Série 3



Sur 2 semaines !

Durant cette semaine 2:

Mardi et Jeudi: Théorie semaine 2

Séance d'exercices du mardi 16.09: **Fin de la Série 1b** en CM 1 et CE 1515

Séance d'exercices du jeudi 18.09: **Début de la Série 2a** en CE 1106 et BS 260

Nous vous invitons à commencer vos séries avant les séances d'exercices afin de préparer vos questions et de les compléter à la maison

Formules + vocabulaire sur moodle

- Feuille de formules comme support pour les exercices

- Liste de vocabulaire (français/anglais)

⇒ disponibles sur moodle

Déformations relatives et Contraintes axiales

<i>Déformation relative et Contrainte normale - 1D</i>			
$\epsilon = \Delta L / L_0$	$\epsilon(x) = \partial u / \partial x$	$\sigma = F / A_{\perp} = E \cdot \epsilon$	E est le module de Young
<i>Déformation relative et contrainte de cisaillement - 1D</i>			
$\gamma = \phi \approx \tan(\phi) = \delta_x / L$		$\tau = F / A_{\parallel} = G \cdot \gamma$	G est le module de cisaillement
<i>Déformation relative thermique - 1D</i>			
$\epsilon_T = \alpha(T_f - T_0) = \alpha \Delta T$			α : coeff. d'expansion thermique
<i>Densité d'énergie de déformation relative - 1D</i>			
$u_0 = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon' = \frac{1}{2} E \epsilon^2 = \frac{1}{2} E (\epsilon_{tot} - \epsilon_T)^2$			ϵ_{tot} est la déformation relative totale ϵ_T est la déformation relative thermique
<i>Rigidité (k) et Flexibilité (f) - pour des barres</i>			
$k = \frac{1}{f} = \frac{E \cdot A}{L}$ pour une barre uniforme		$F = k \cdot \delta \leftrightarrow \delta = f \cdot F$	$\delta = \frac{F \cdot L}{A \cdot E}$ si barre uniforme
$f_{eq} = \sum f_i$ pour des barres "en série"			$k_{eq}^{-1} = \sum k_i^{-1}$ pour des barres "en série"
<i>Déformation relative - 3D</i>			
$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$		$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$	$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$
<i>Matrice de souplesse</i>			
$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$			$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
<i>Matrice de rigidité</i>			
$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}$			ν est le coefficient de Poisson

Apprentissage interactif

Pour la partie mécanique des structures

■ Téléphones intelligents

- iPhone
- Android

} Télécharger et installer l'App "*PointSolutions*"



■ Ordinateurs

- Aller sur **<https://tppoll.eu>**

■ Choisir **EUROPE** Server (si demandé)

■ Join session – **MICRO200**

■ Lorsque demandé – **Entrer comme anonyme (pas votre vrai nom)**

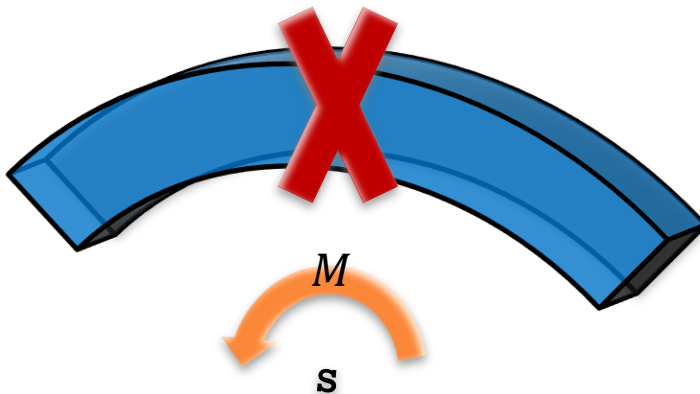
Semaines 2 à 5



Déformation axiale
(semaines 2 à 4)



Torsion (semaine 5)



~~Flexion (semaine 6)~~

■ **Contraintes et Déformation relatives: 1D à 3D**

- **Contraintes normales et de cisaillement en 3D** et leur **représentation en matrice**
- **Construction de la matrice** de contraintes en 3D
- **Déformations relatives, normales et de cisaillement**, et leur **représentation en matrice**
- Relation entre contrainte et déformation relative: **loi de Hooke en 3D**
- **Calculer la contrainte à partir de la déformation relative et vice versa**
- Passer de l'équilibre en 1D à **l'équilibre en 3D**

Pourquoi regarder à l'intérieur ?

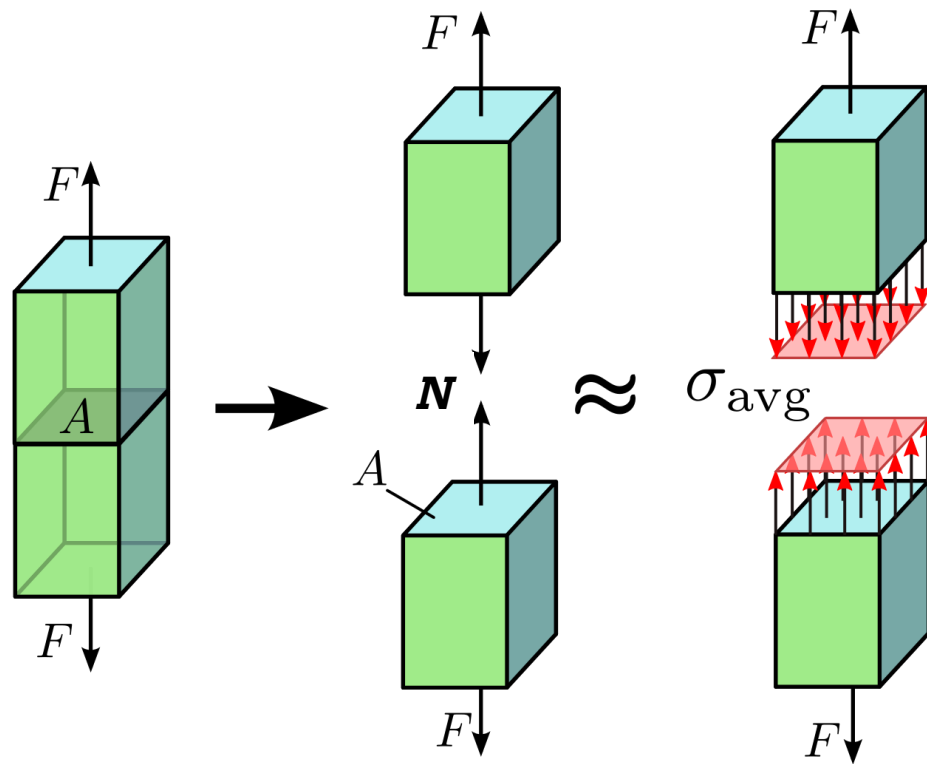
- Pour voir les forces internes et **déterminer les contraintes**

En tant qu'ingénieur, cela nous donne accès à la:

– Déformation

– Rupture si contrainte trop élevée

De forces internes à contraintes



N : force interne
 σ : contrainte interne

$$\sigma = \frac{N}{A} \text{ N/m}^2 \text{ ou Pa}$$

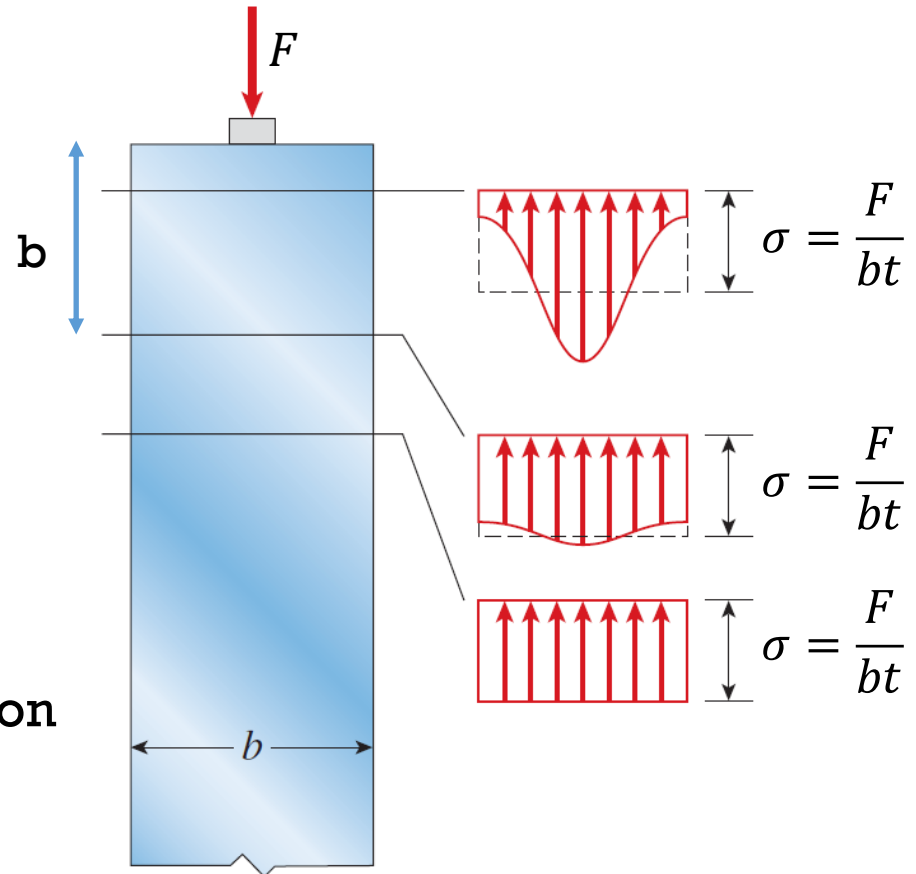
La contrainte tient compte de la section de la barre. Une force donnée n'aura pas le même effet sur des barres de sections différentes.

$$\sigma = \frac{N}{A_{\perp}}$$

■ Valide si:

□ $L \gg b, t$

avec b, t , la largeur de la section

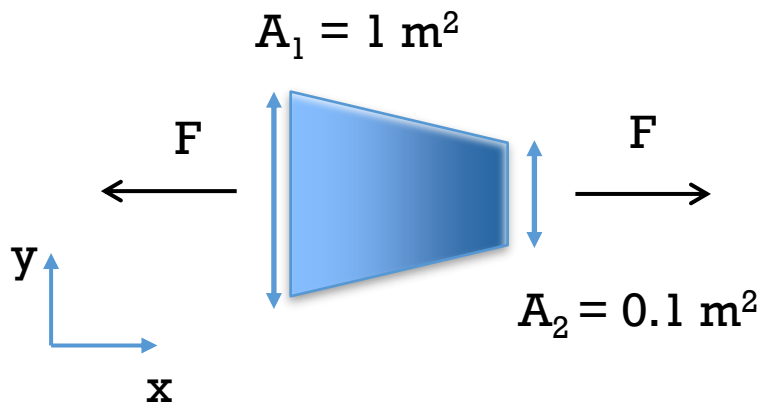


- des forces externes de traction génèrent une contrainte en **traction positive**
- des forces externes en compression génèrent une contrainte en **compression négative**

Contrainte maximale dans une barre ?

Quelle est la force maximale que l'on peut appliquer avant rupture pour une limite d'élasticité du matériau $\sigma_{\text{yield}} = 1 \text{ GPa}$ (acier) ?

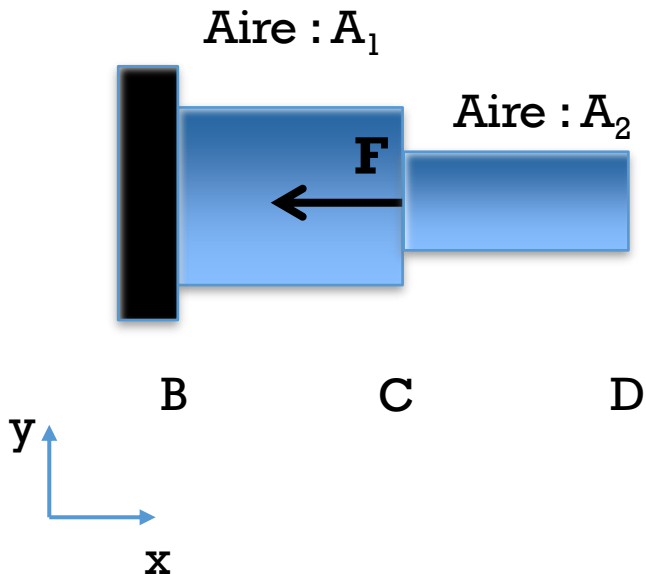
- A. $1 \cdot 10^9 \text{ N}$
- B. $1 \cdot 10^8 \text{ N}$
- C. $1 \cdot 10^{10} \text{ N}$
- D. 1 GPa



Contraintes normales dans des barres

Quel segment brisera en premier sous l'application d'une force F au point C: BC ou CD ?

- A. Segment CD
- B. Segment BC



- ❑ Dessiner le **Diagramme de corps libre**
- ❑ Poser les **équations d'équilibre**
- ❑ Trouver les **réactions**
- ❑ Trouver les **forces internes** dans chacune des sections
- ❑ À partir des forces internes calculer les **contraintes** dans ces sections (selon l'aire de leur section)
- ❑ Voir le signe des contraintes pour **traction ou compression**

Contraintes normales

Méthode des sections

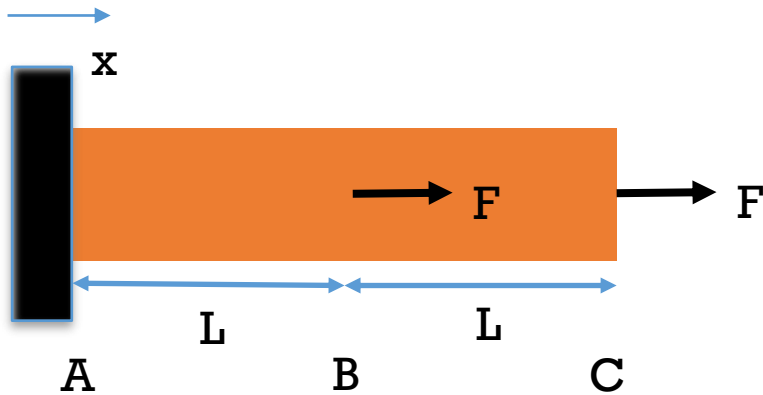
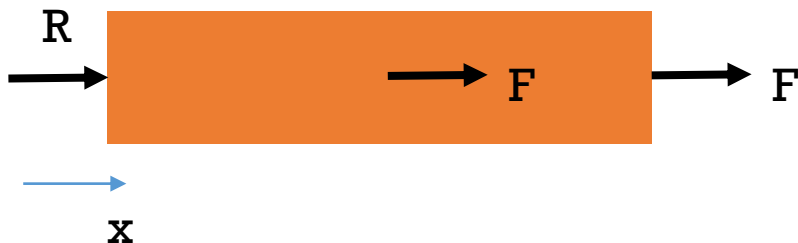


Diagramme des corps libres



Equation d'équilibre

$$R + F + F = 0$$

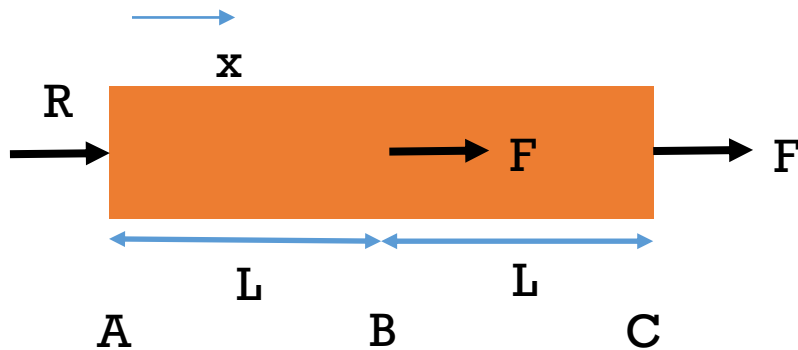
Calcul de la réaction

$$R = -2F$$

Contraintes normales

Méthode des sections

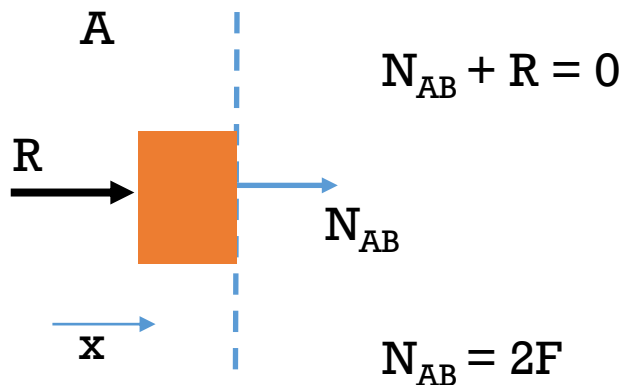
Méthode des sections pour trouver les forces internes pour chacun des segments AB et BC



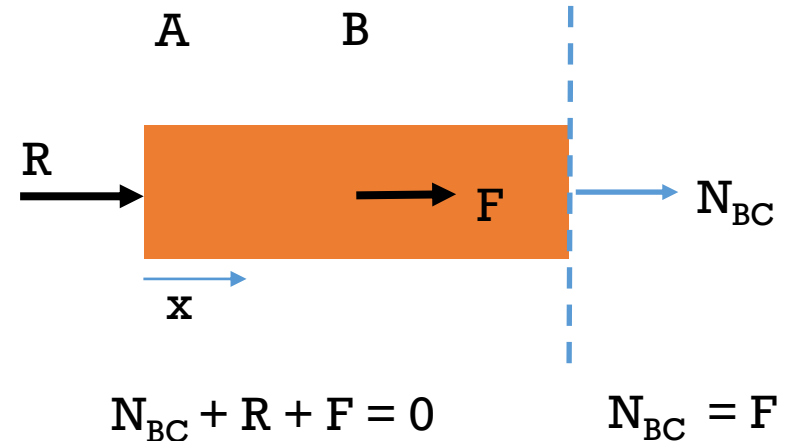
avec $R = -2F$

En partant de la gauche de la barre

Section dans le segment AB



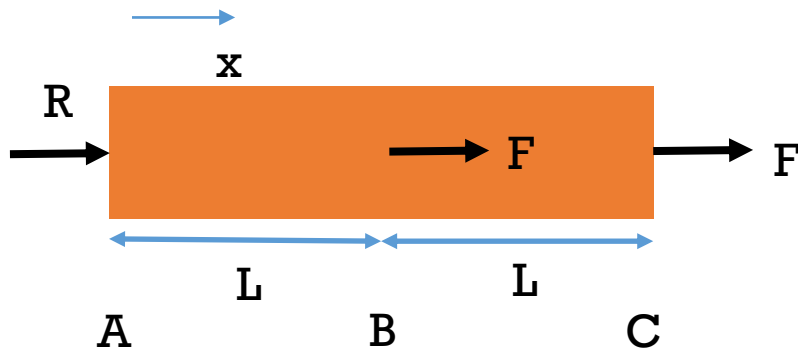
Section dans le segment BC



Contraintes normales

Méthode des sections

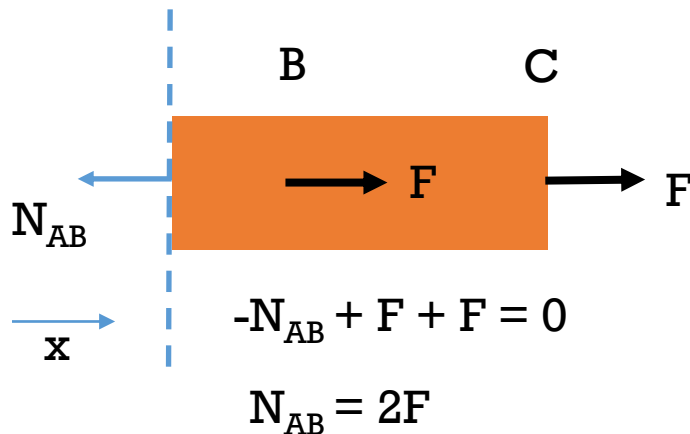
Méthode des sections pour trouver les forces internes pour chacun des segments AB et BC



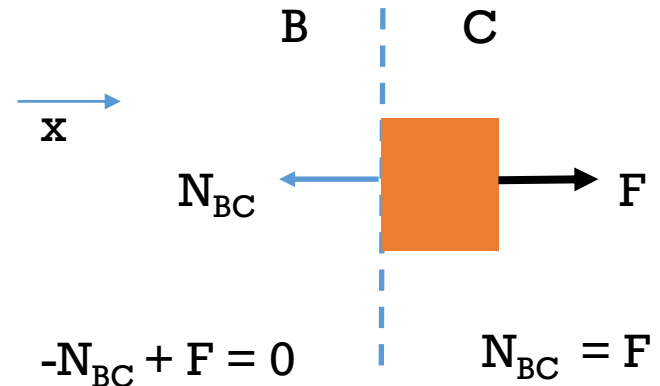
avec $R = -2F$

En partant de la droite de la barre

Section dans le segment AB

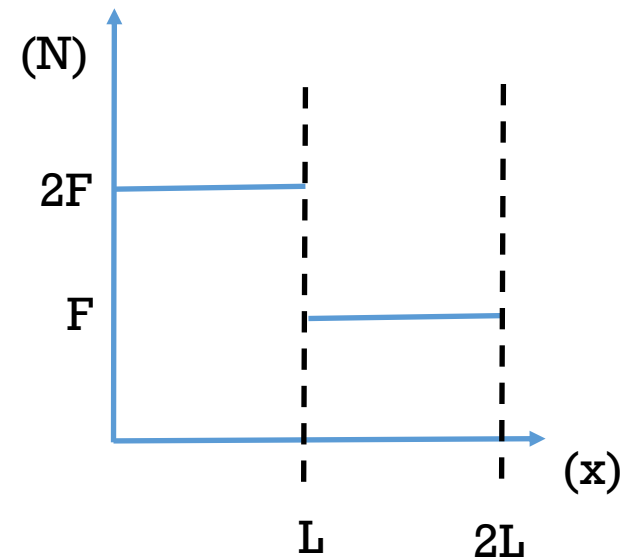
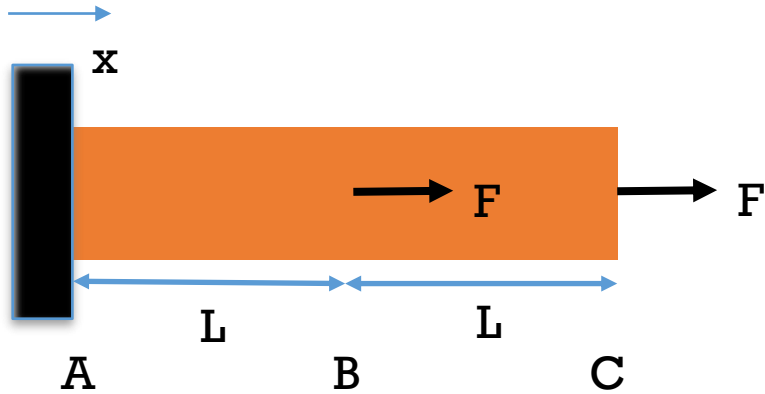


Section dans le segment BC



Contraintes normales

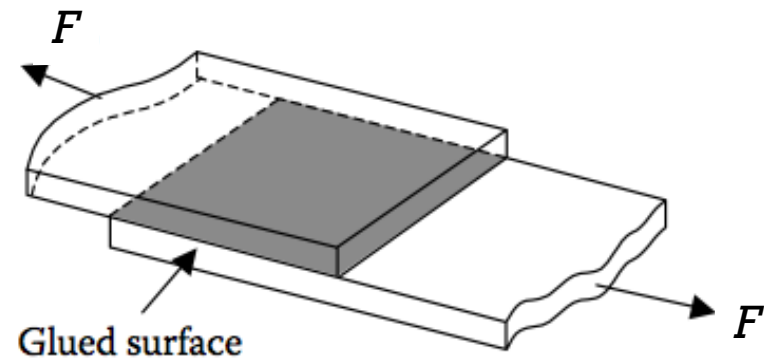
Profile de force le long de l'axe en x



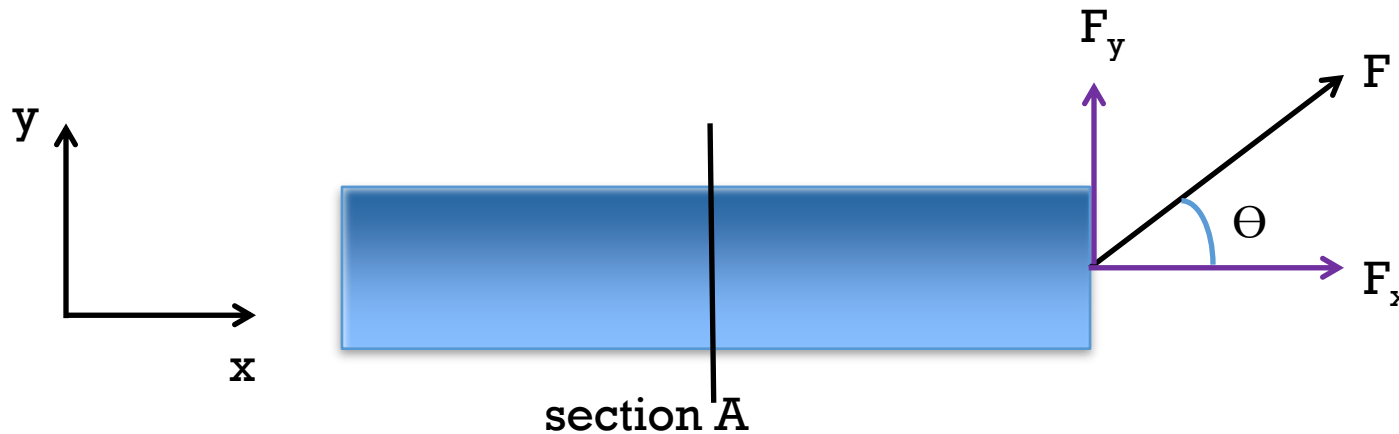
Contraintes en cisaillement sont parallèles à la surface sur laquelle elles agissent

- Surface \bar{A} est parallèle à la force externe F (et aussi à la force interne N)
- Contrainte en cisaillement sur la surface \bar{A} :

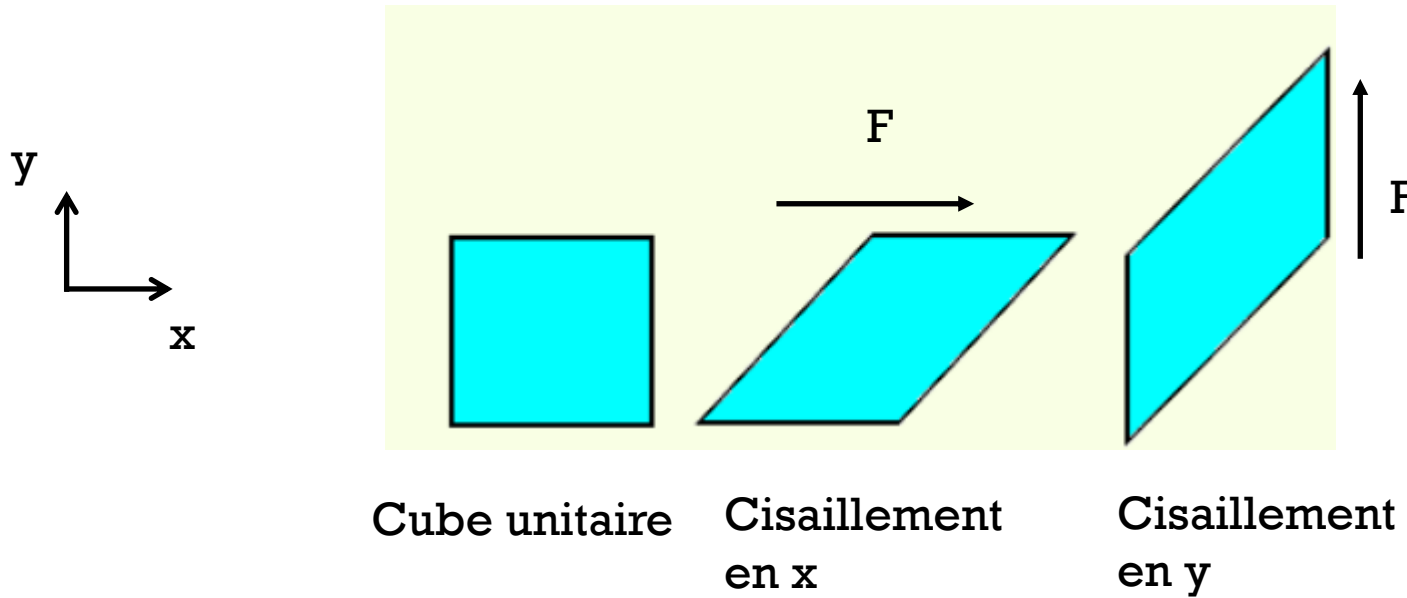
$$\tau \equiv \frac{N}{A_{||}}$$



- On applique une Force F à un angle θ par rapport à l'axe perpendiculaire à la coupe

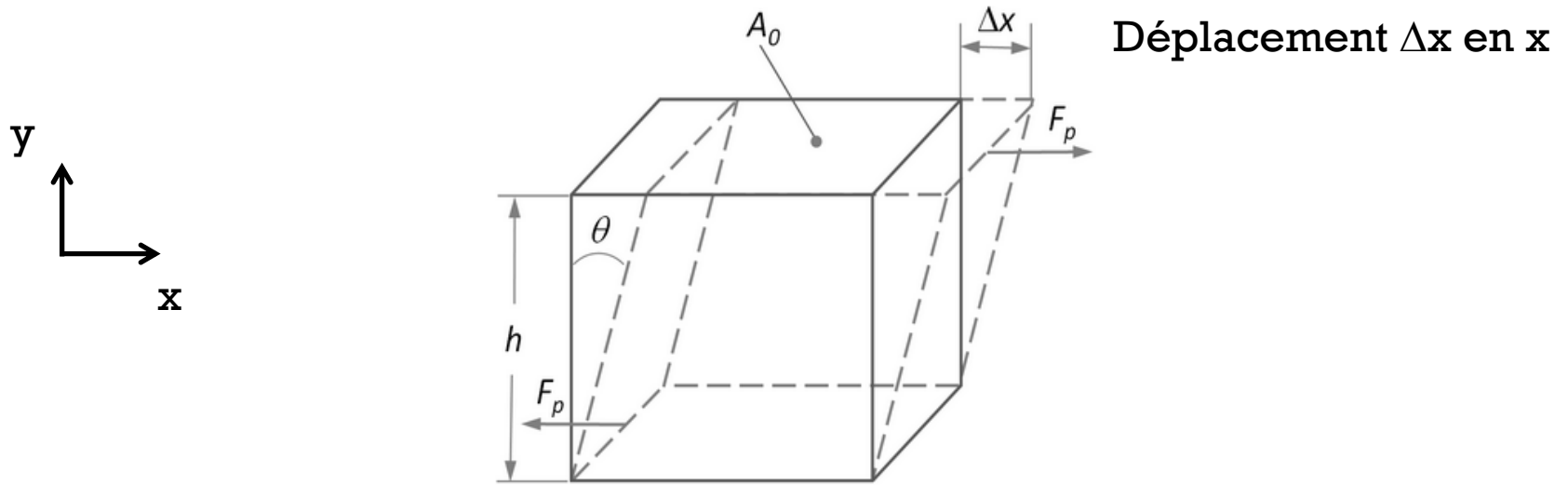


- En décomposant la force en x et y, nous trouvons une force axiale, et une force perpendiculaire à la surface, donnant lieu à:
 - **Contrainte Normale (σ): N / A**
 - **Contrainte en Cisaillement (τ): V / A**

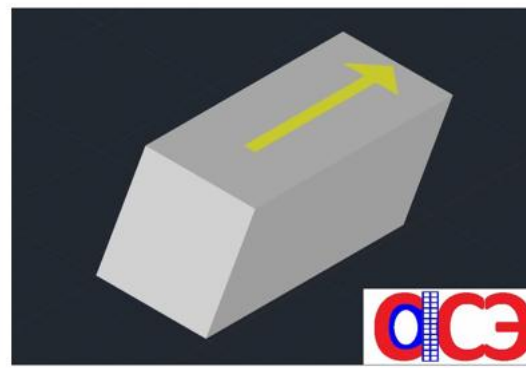
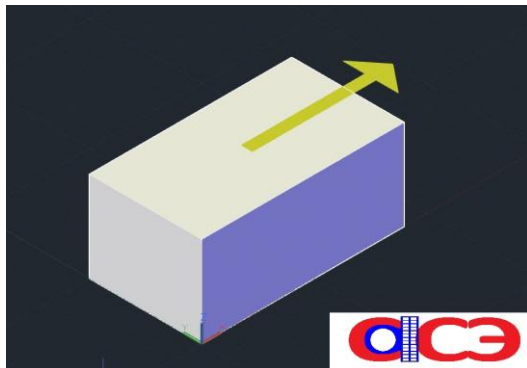


Force de cisaillement appliquée parallèle à la surface en x et/ou en y

Déformation de la surface en 2D qui sera caractérisée par **une variation d'angle**



Déformation d'un cube en un parallépipède



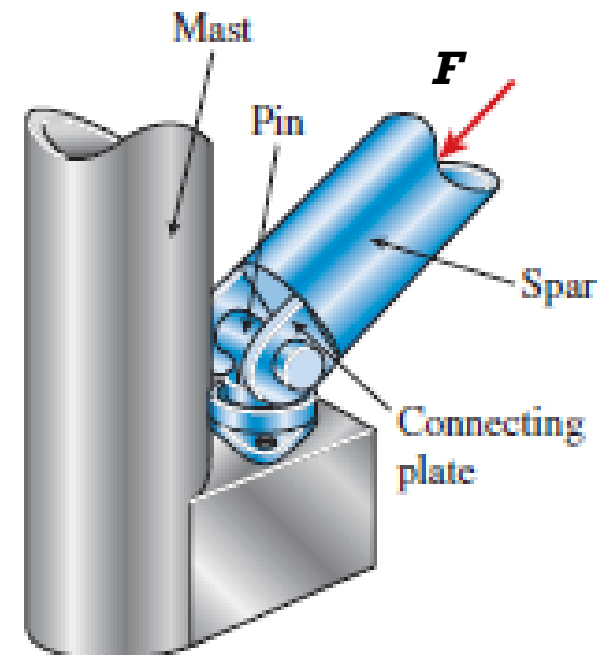
Exemple 1

Contraintes normales et de cisaillement

- Cylindre plein en bleu est fixé de façon rigide à un mât en deux points à l'aide d'un écrou (aucun mouvement possible)
 - Diamètre externe du cylindre: $D = 10 \text{ cm}$
 - Diamètre du boulon: $d = 2 \text{ cm}$

Une force $F = 1000\pi \text{ N}$ est appliquée

1. Quelle est la contrainte normale dans le cylindre ?
2. Quelle est la contrainte de cisaillement dans l'écrou ?



Exemple 1

Contraintes normales et de cisaillement

■ Contrainte normale dans le cylindre

$$\sigma = \frac{N}{A_{\perp}}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad N = -F \quad \sigma = \frac{-F}{A}$$

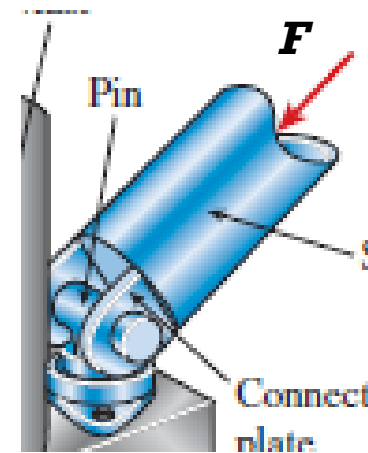
$$\sigma = -1000\pi \times \frac{4}{\pi D^2} = -400 \text{ kPa}$$

■ Contrainte de cisaillement dans l'écrou

$$\tau = \frac{N}{A_{\parallel}}$$

$$\tau = \frac{N}{2A} \quad \tau = \frac{-F}{2A}$$

$$\tau = -1000\pi \times 1/2 \left(\frac{4}{\pi d^2} \right) = -5 \text{ MPa}$$



■ Contrainte normale

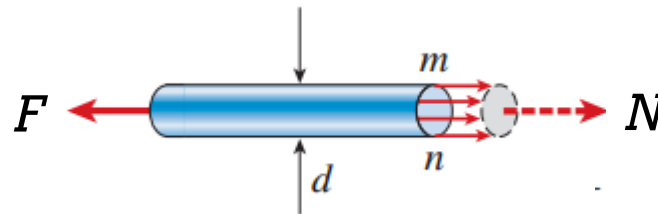
$$\sigma = \frac{N}{A_{\perp}}$$

en [N/m²] ou [Pa]

■ Contrainte en cisaillement

$$\tau \equiv \frac{N}{A_{\parallel}}$$

Rappel: les forces normales “internes” doivent être dessinées comme **sortant** des faces des coupes



Convention:

Traction: positif

Compression: négatif

Lien en Contrainte et Déformation relative

- Relation linéaire entre Contrainte et Déformation Relative

$$\sigma \propto \varepsilon$$

Relation linéaire valide jusqu'à une valeur de σ ou ε au delà de laquelle la relation devient non-linéaire (et possible avec hystérèse)

- **Loi de Hooke pour contrainte normale**

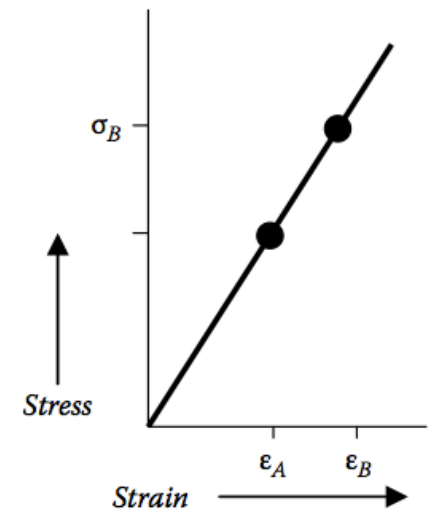
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

E (Pa) = “module de Young ” ou “module élastique”

- **Loi de Hooke pour contrainte en cisaillement:**

$$\tau = G \cdot \gamma$$

G (Pa) = “module de cisaillement » ou “module de rigidité”



Lien en Contrainte et Déformation relative

■ Mécanique des structures:

Déterminer la contrainte et la déformation relative et leurs composantes lorsque la structure est sous charge

Concepts fondamentaux

Contrainte & Déformation relative

Infos sur Rigidité et déformation / Robustesse et bris

Contrainte: $\sigma = N/A$

Déformation relative : $\varepsilon = \Delta L/L$

Loi d'Hooke

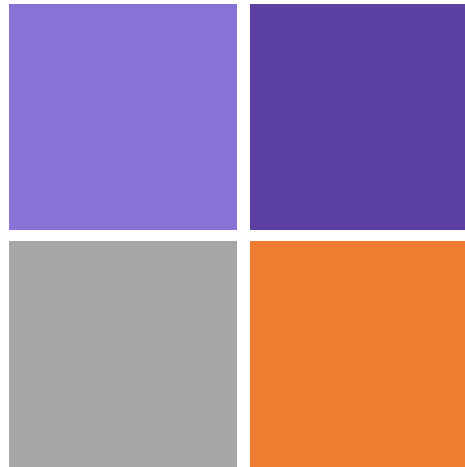
$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\tau = G\gamma$$

Semaine 2

Partie I:

Contraintes en 3D



Plus d'information disponible sur le moodle:

□ Document Stress 3D IAST UniColorado

Important: Nous allons suivre ici la notation donnée dans ces notes en utilisant F_{int} comme force interne en équilibre

N, la force interne, est symbolisée par F_{int}

■ Représentation nécessaire en 3D

- Des contraintes
- Des déformations relatives
- Des modules d'élasticité et de cisaillement

Loi de Hooke généralisée

Loi de Hooke en 3D

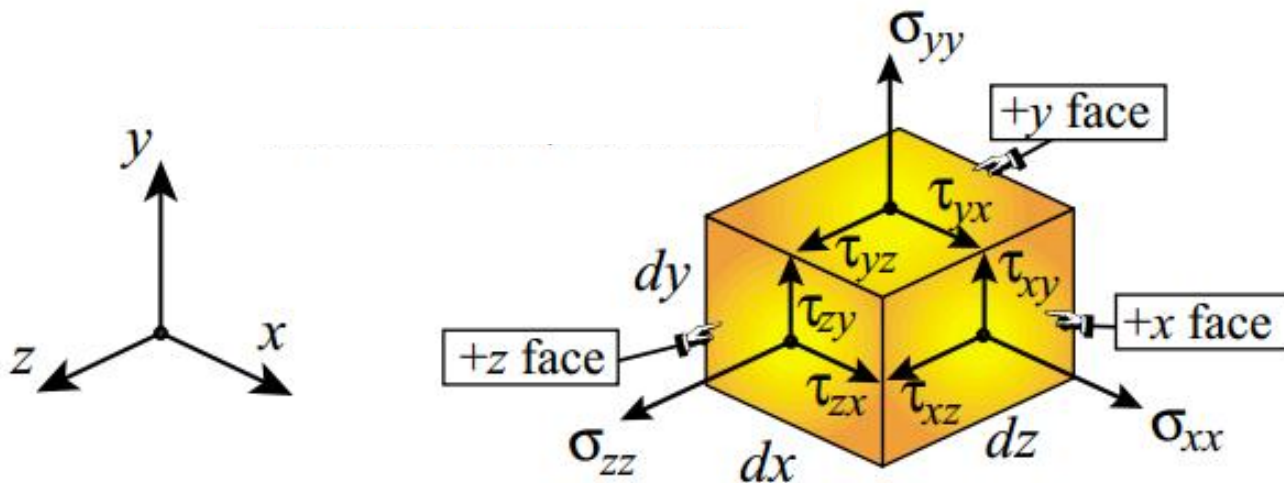
$$[\boldsymbol{\sigma}] = [\mathbf{E}] [\boldsymbol{\varepsilon}]$$

Les lois de Hooke en 2D et en 1D sont des cas simplifiés de la loi d'Hooke généralisée

Contraintes en 3D

Représentation des contraintes

- **Cube d'un volume $dx dy dz$** sur lequel une charge externe est appliquée
 - 3 contraintes normales
 - 6 contraintes de cisaillement qui peuvent être réduites à 3 par symétrie



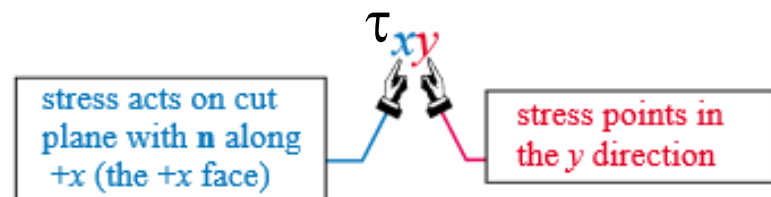
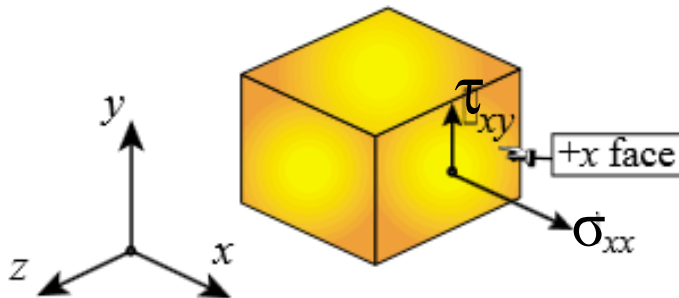
Contraintes en 3D

Représentation des indices

- Pour les contraintes mécaniques, les **deux directions sont**:
 - 1^{er} indice**: L'orientation du plan coupé (comme définie par sa normale sortante)
 - 2^{eme} indice**: L'orientation de la force interne

En exemple:

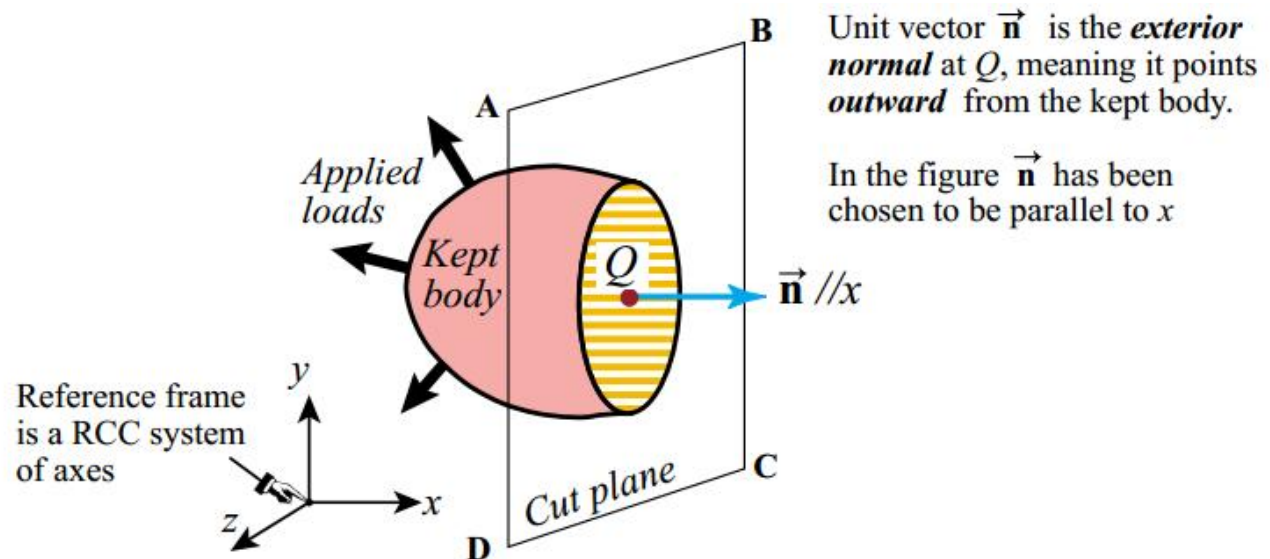
- σ_{xx} agit sur la face 'x' et pointe dans la direction de l'axe des x
- τ_{xy} agit sur la face 'x' et pointe dans la direction de l'axe des y



Contraintes en 3D

Intensité des forces sur des surfaces internes

- Corps solide en 3D en équilibre statique sous contrainte. Nous voulons trouver l'état de contrainte en un point arbitraire Q.
- Couper le corps solide avec un plan ABCD qui passe par Q. Le plan est coupé avec sa normale parallèle à l'axe +x.
- Pour rétablir l'équilibre nous devons remplacer la portion enlevée par des forces internes.



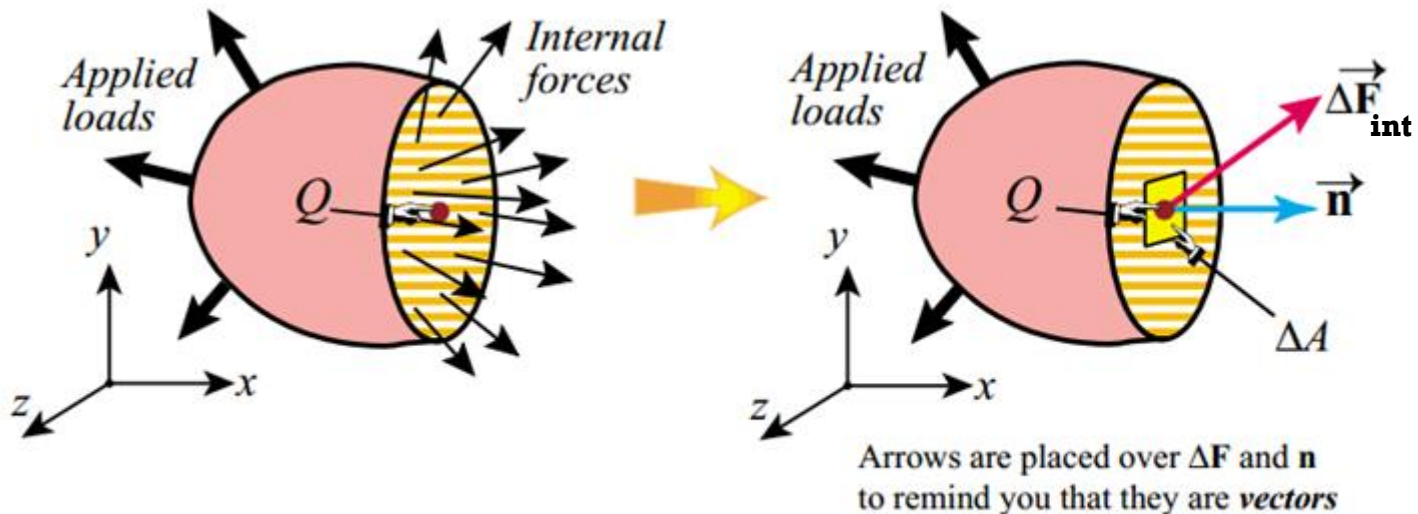
Orienting the cut plane ABCD by its exterior unit normal vector \vec{n} .

Contraintes en 3D

Intensité des forces sur des surfaces internes

- Ces forces internes forment un système de forces distribuées par unité d'aire, étant des vecteurs, qui vont généralement varier en norme et en direction
- Nous prenons une aire élémentaire ΔA autour de Q dans le plan coupé. $\vec{\Delta F}_{\text{int}}$ est la résultante des forces internes agissant sur celui-ci. Nous positionnons le vecteur normal \vec{n} avec Q comme origine.

Sur une coupe ou section imaginaire, une somme vectorielle des forces internes maintient le corps en équilibre.

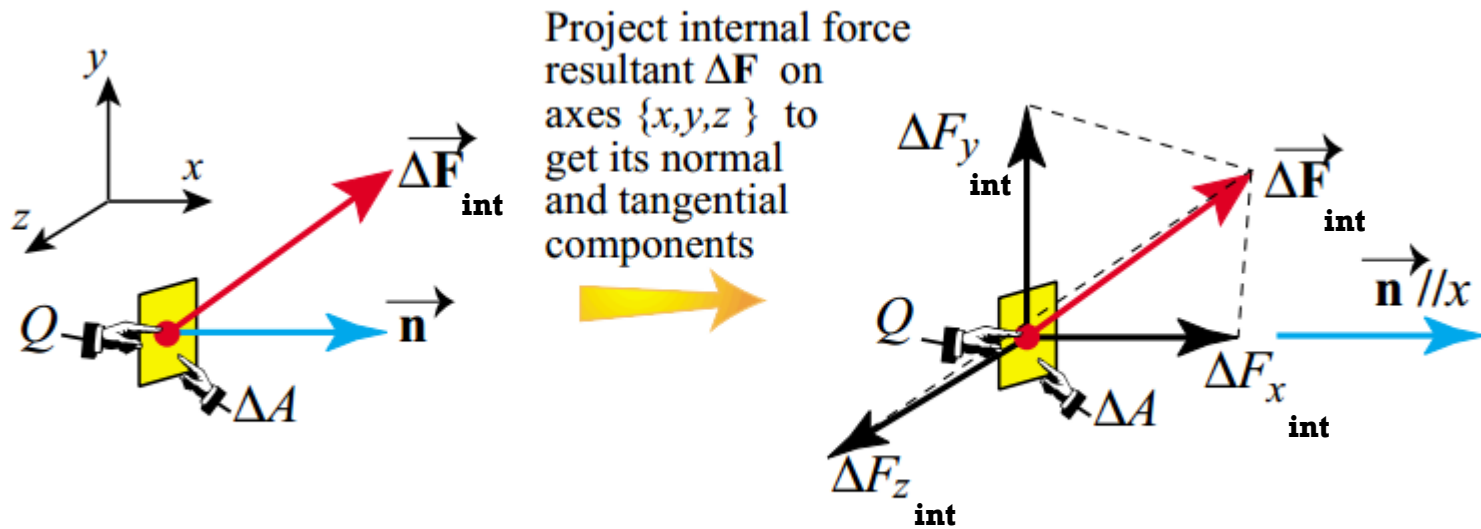


Internal force resultant $\vec{\Delta F}$ over elemental area about point Q .

Contraintes en 3D

Intensité des forces sur des surfaces internes

- Nous projettons la résultante $\vec{\Delta F}_{\text{int}}$ sur les axes de référence $\{x, y, z\}$. Cela produit 3 composants $\Delta F_{x_{\text{int}}}$, $\Delta F_{y_{\text{int}}}$, $\Delta F_{z_{\text{int}}}$
- Parce que \mathbf{n} a été pris parallèle à l'axe des x , $\Delta F_{x_{\text{int}}}$ est une force interne normale. Les composants $\Delta F_{y_{\text{int}}}$ et $\Delta F_{z_{\text{int}}}$ sont des forces internes tangentielles, de cisaillement

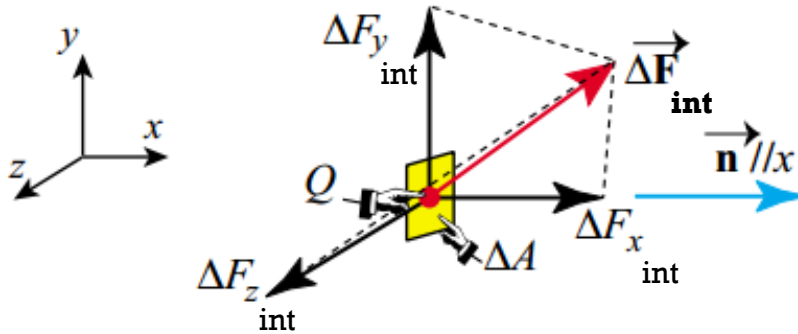


Projecting the internal force resultant onto normal and tangential components.

Contraintes en 3D

Intensité des forces sur des surfaces internes

- Les composantes de la contrainte en 'x' au point Q en prenant les limites du ratio de la force interne sur l'aire élémentaire tendant vers zéro:



$$\sigma_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{x \text{ int}}}{\Delta A} \quad \tau_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{y \text{ int}}}{\Delta A} \quad \tau_{xz} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{z \text{ int}}}{\Delta A}$$

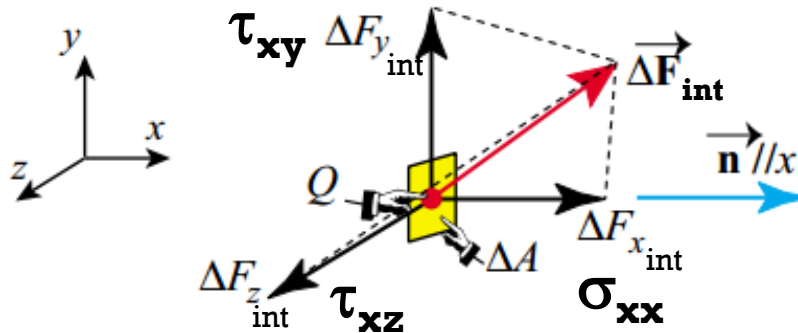
Définition des composantes de la contrainte comme une limite mathématique de la force sur l'aire

Les composantes de la contrainte en x:

- pour le plan ayant son vecteur unitaire dans la direction de l'axe des 'x'

Contraintes en 3D

Intensité des forces sur des surfaces internes



$$\sigma_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x^{\text{int}}}{\Delta A} \quad \tau_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y^{\text{int}}}{\Delta A} \quad \tau_{xz} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z^{\text{int}}}{\Delta A}$$

□ Pour les contraintes mécaniques, les 2 directions sont:

1^{er} indice: L'orientation du plan coupé (comme définie par sa normale sortante)

2^{eme} indice: L'orientation de la force interne

En utilisant deux coupes de plans supplémentaires, en prenant des plans avec leur normale selon les axes y et z, respectivement:

- 6 composantes en plus sont obtenues en répétant la même procédure
 - Déterminer la force interne résultante;
 - Projection sur les axes;
 - Diviser par l'aire élémentaire;
 - Prendre la limite

→ \vec{n} parallèle à l'axe y

$$\sigma_{yy}, \quad \tau_{yx}, \quad \tau_{yz}.$$

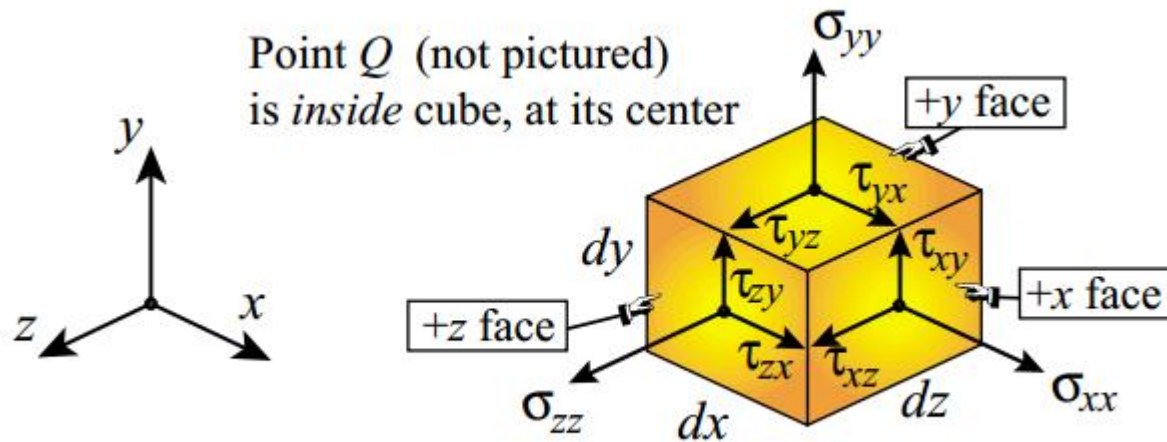
→ \vec{n} parallèle à l'axe z

$$\sigma_{zz}, \quad \tau_{zx}, \quad \tau_{zy}.$$

Sur le cube des contraintes

Orientation et convention des signes

- Le cube de contraintes a 3 faces positives (+). Les 3 autres faces opposées sont négatives (-). Pour maintenir l'équilibre, **les composantes des contraintes sur ces faces négatives doivent être inversées**.



- Les composantes des contraintes positives sont représentées ici:

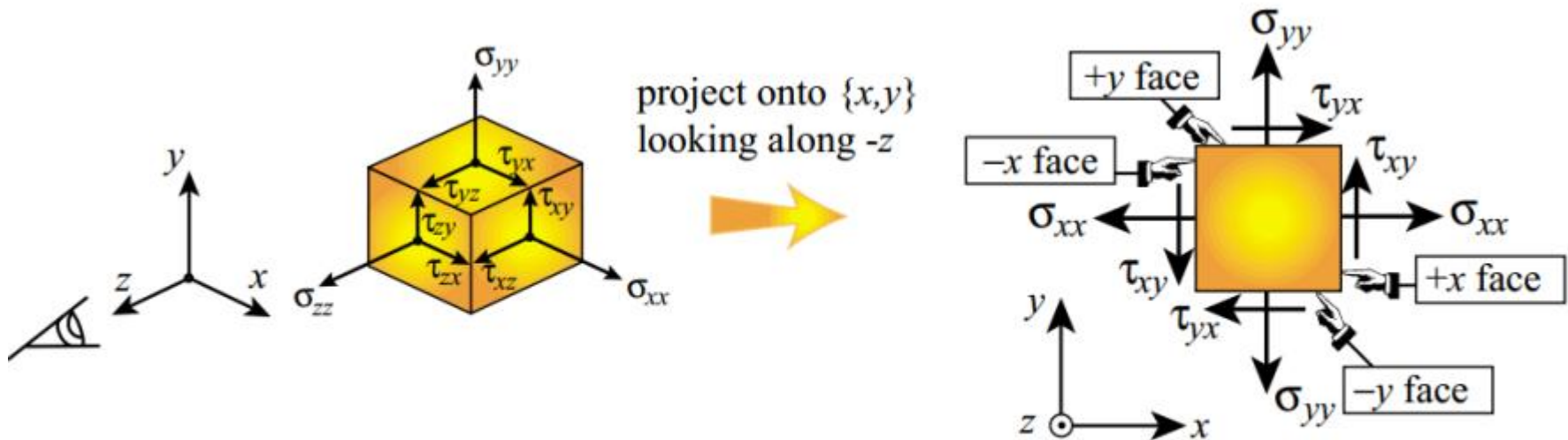
σ_{xx} positive pointe selon la direction $+x$ sur la face $+x$, mais selon la direction $-x$ sur la face $-x$ à l'opposée (en tension)

τ_{xy} positive pointe selon la direction $+y$ sur la face $+x$ face mais selon la direction $-y$ sur la face $-x$ à l'opposée

Sur le cube des contraintes

Orientation et convention des signes

- Pour mieux visualiser cette inversion des contraintes, il est utile de projeter le cube des contraintes sur le plan $\{x,y\}$ en le regardant de la direction $+z$ vers la direction $-z$
- Le diagramme 2D présente la règle donnée dans le transparent précédent, ici avec toutes **les contraintes positives indiquées**



Projecting onto $\{x, y\}$ to display component stress reversals on going from $+$ to $-$ faces.

Convention des signes et indices

Contraintes normales

- **Contrainte normale:** positive (négative) si elle produit une traction (compression) dans le matériau

Déterminer la direction de la contrainte normale selon la direction des axes x, y, z du système de coordonnées

- Contrainte normale positive quand le matériau est en traction



- Contrainte normale négative quand le matériau est en compression

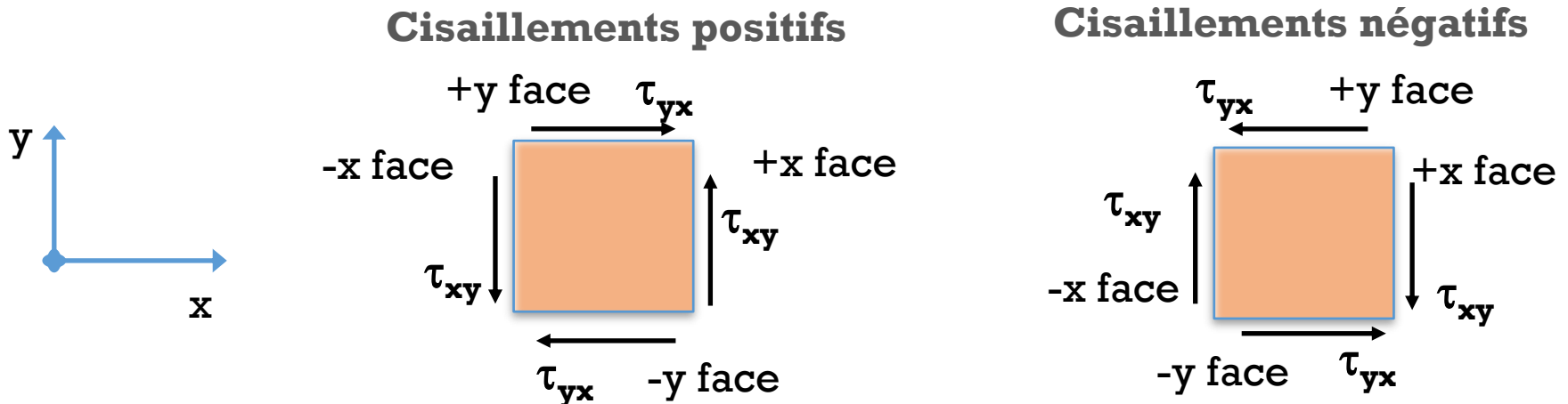


Convention des signes et indices

Contraintes de cisaillement

■ Contrainte de cisaillement:

- **Positive** si, en agissant sur la face + identifiée par le 1^{er} indice, elle pointe dans la direction + identifiée par le 2^{eme} indice
- **Positive** si, en agissant sur la face - identifiée par le 1^{er} indice, elle pointe dans la direction - identifiée par le 2^{eme} indice
- **Négative** si, en agissant sur la face + identifiée par le 1^{er} indice, elle pointe dans la direction - identifiée par le 2^{eme} indice
- **Négative** si, en agissant sur la face - identifiée par le 1^{er} indice, elle pointe dans la direction + identifiée par le 2^{eme} indice



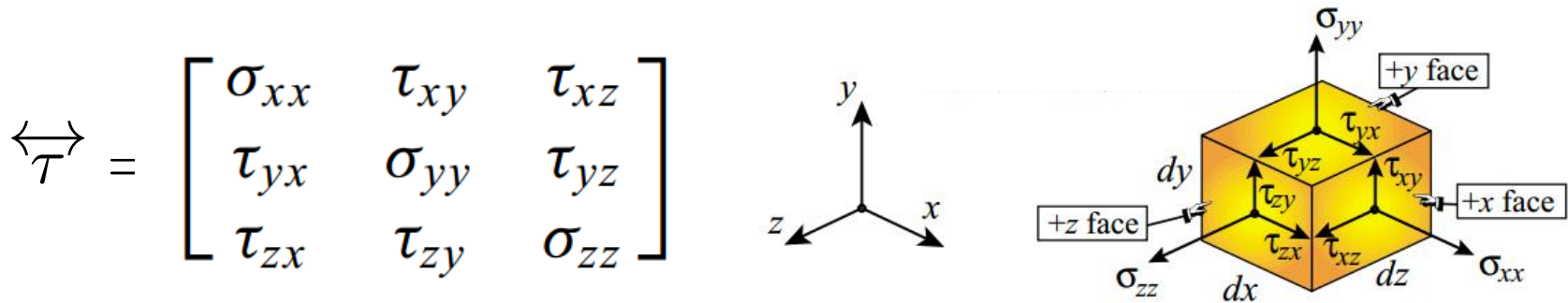
Matrice des contraintes en 3D

- Les 9 composantes de la contrainte liés aux axes x,y,z peuvent être représentées par une **matrice 3 × 3**,

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- σ_i : les contraintes normales, τ_{ij} : les contraintes de cisaillement
- Les contraintes normales sont placées sur la diagonale
- Les deux directions sont:
 - L'orientation du plan de coupe (comme défini par sa normale sortante)
 - Et l'orientation des composantes de la force interne

Réciprocité des contraintes de cisaillement



$$\overleftrightarrow{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- A partir des conditions d'équilibre des moments sur le cube de contrainte infinitésimal, il peut être montré:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

en norme

- La **matrice des contraintes est symétrique** et l'état de contrainte en 3D dépend de 6 composantes indépendantes:
 \Rightarrow *3 normales et 3 en cisaillement*

Réciprocité des contraintes de cisaillement

- La **matrice des contraintes est symétrique** et l'état de contrainte en 3D dépend de 6 composantes indépendantes:

⇒ **3 normales**

⇒ **3 en cisaillement**

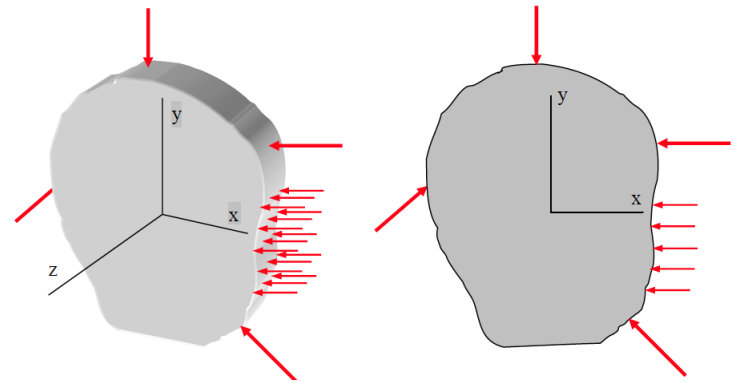
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} & \tau_{zy} = \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{symm} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Simplifications de la matrice

Etat de contrainte en 2D et 1D

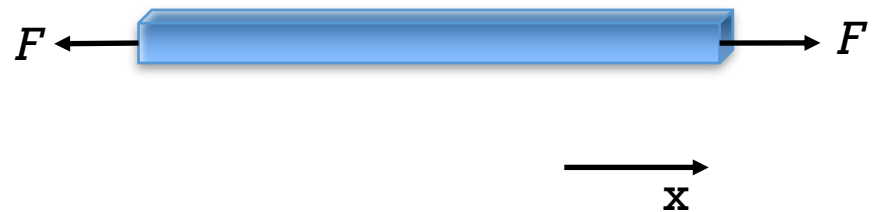
- Pour une plaque mince, toutes les composantes selon z peuvent être considérées comme négligeables, et définies comme étant zero.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- Une structure telle une barre avec une force axiale appliquée le long d'un seul axe, ici l'axe des x , n'aura qu'une composante normale:

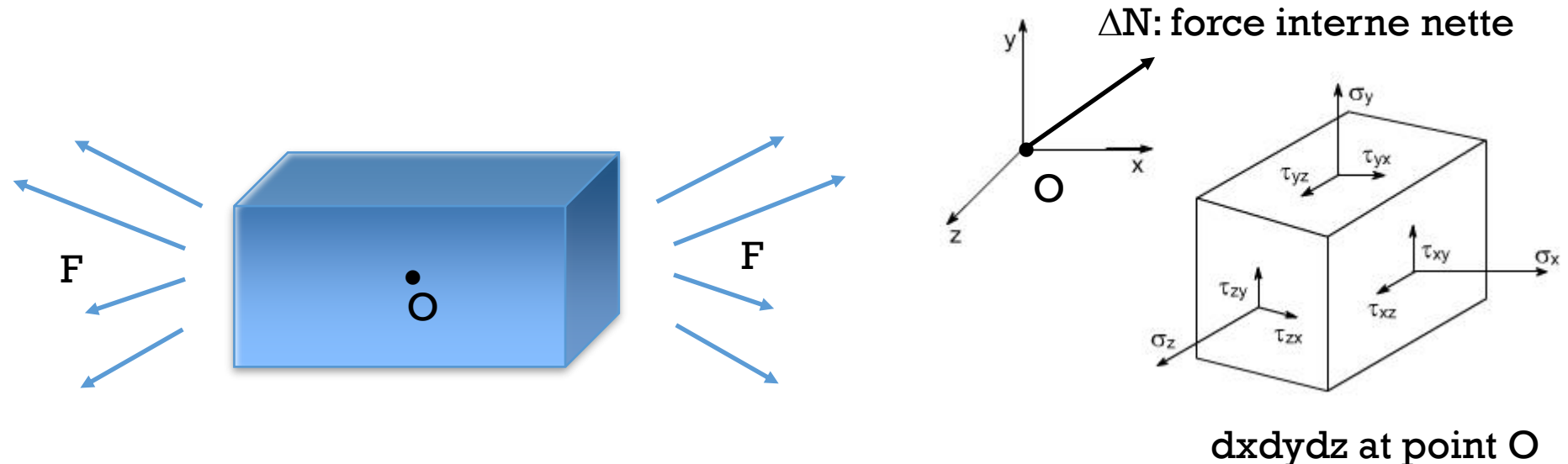
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Matrice des contraintes

Remarques finales

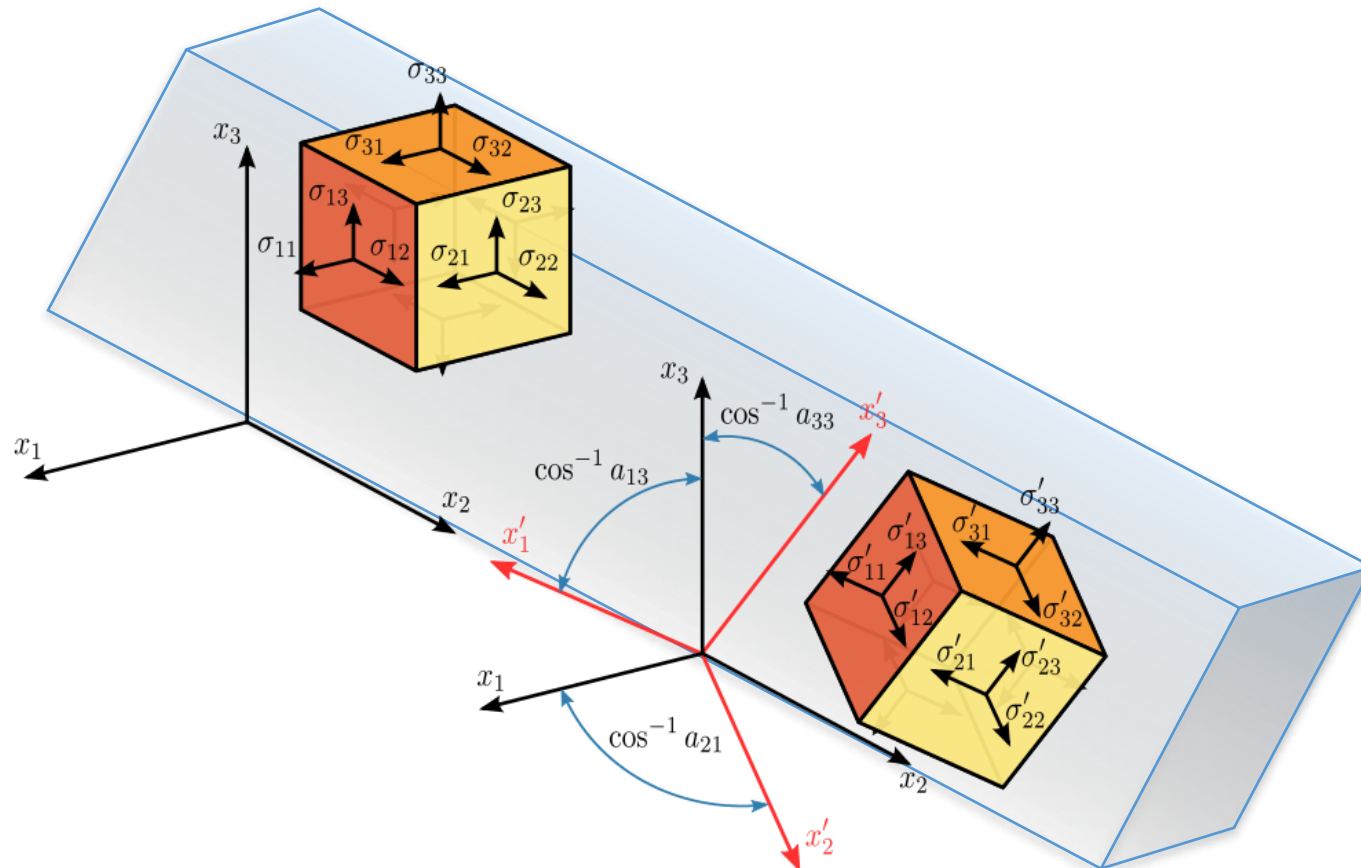
- Si nous passons 3 plans orthogonaux mutuels au travers de n'importe quel point O et que nous trouvons les vecteurs de contraintes ($\vec{\sigma}$) sur chacune des 3 faces mutuellement perpendiculaires dessinées au travers de O , nous aurons alors caractérisé la contrainte au point O avec la **matrice des contraintes** $\vec{\sigma}$



Matrice des contraintes

Remarques finales

- En effectuant une rotation des axes, nous pouvons examiner n'importe quelle direction dans le matériau et trouver les contraintes normales et de cisaillement respectives (en semaine 4)



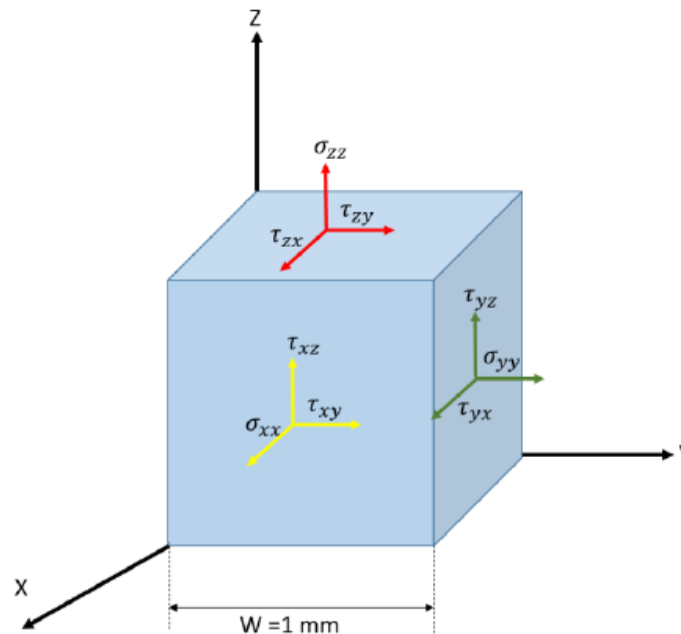
De la matrice de contraintes à un tenseur de contraintes

- L'état de contrainte à un point n'est pas un scalaire ou un vecteur. C'est un objet mathématique plus compliqué et appelé **tenseur** (plus précisément un tenseur du 2eme ordre).
- **Les tenseurs du 2eme ordre sont définis par une norme et deux directions.**
- Le tenseur de contraintes attribue un état de contraintes à chaque point d'un plan défini par le vecteur normal \vec{n} , et ce pour différentes orientations.
- Nous n'allons pas traiter les tenseurs dans ce cours comme des entités mathématiques. Nous allons utiliser les tenseurs de contraintes et déformations relatives avec une approche physique complétement par des recettes.
- **Scalars, vecteurs, et tenseurs du 2eme ordre** peuvent varier d'un point à l'autre. Ils sont donc **exprimés en fonction des coordonnées de leur position**. En mathématique-physique, de telles fonctions sont appelées **champs**.

Example de question avec un tenseur de contraintes

We apply a load F on a cubic piece of 1 mm width as shown in Figure 2.6.1. The material young modulus is 200 GPa, Poisson's ratio 0.25 and the measured stress tensor is given as follow. We suppose the material to be homogeneous and isotropic. We worked at constant ambient temperature (20°C).

$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 30 & 80 \\ 30 & 180 & 50 \\ 80 & 50 & 220 \end{bmatrix} \text{MPa} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

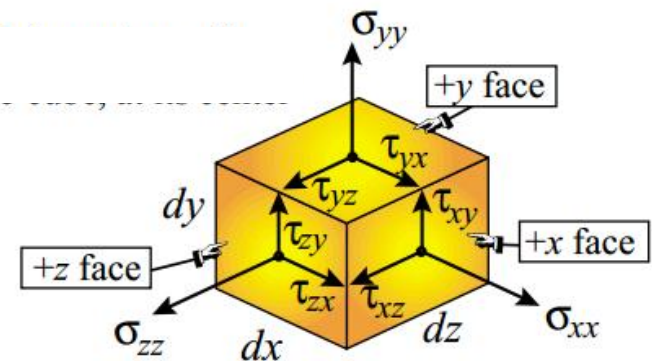
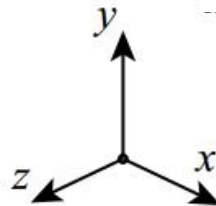


Résumé Partie I

Contraintes en 3D

- Matrice de contraintes: 6 composantes pour décrire l'état en 3D
 - 3 contraintes normales et 3 contraintes de cisaillement

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



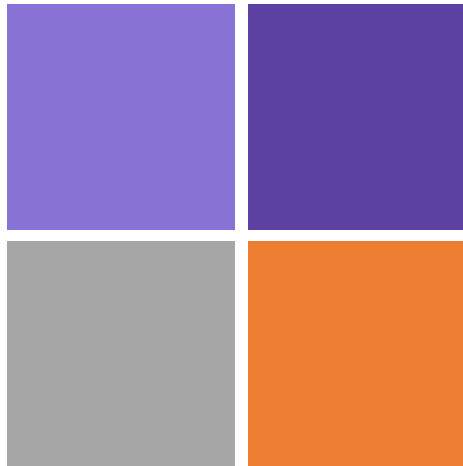
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

en norme

Semaine 2

Partie II:

Déformation relative en 3D



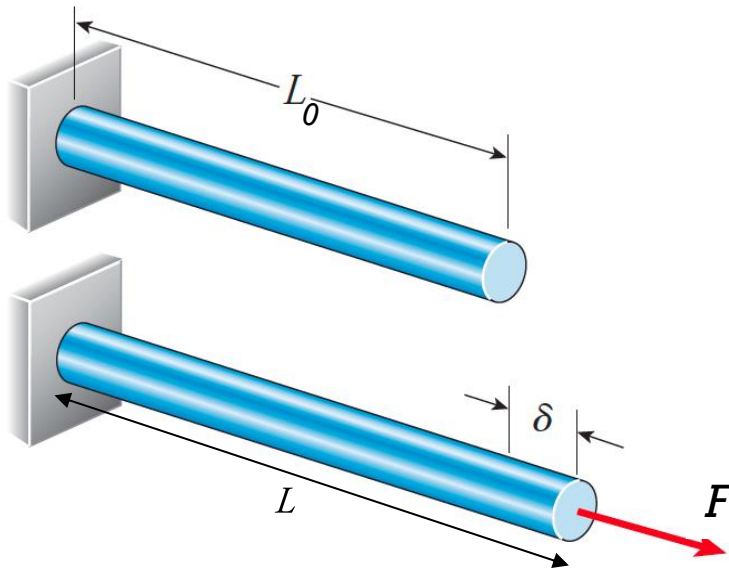
1. Rappel déformation relative en 1D
2. Déformation relative en 3D
3. Matrice de déformations relatives

Plus d'information disponible sur le moodle:

❑ [Document Strain 3D IAST UniColorado](#)

Déformation relative moyenne en 1D

Déformation relative axiale



$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

$\varepsilon > 0$ en traction

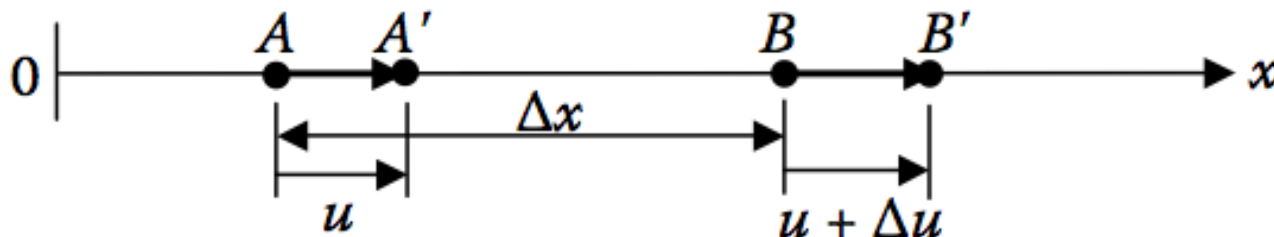
$\varepsilon < 0$ en compression

ε caractérise l'«intensité de la déformation»

- sans unités
- peut être exprimée en m/m ou en %
- des efforts en traction ou en compression créent une déformation relative normale

Définition / dérivation de la déformation relative en 1 point en 1D

- On étire un objet. Considérons le segment AB de longueur initiale Δx .



- u est le “déplacement d’un corps rigide ” et Δu est l’élongation de l’élément Δx

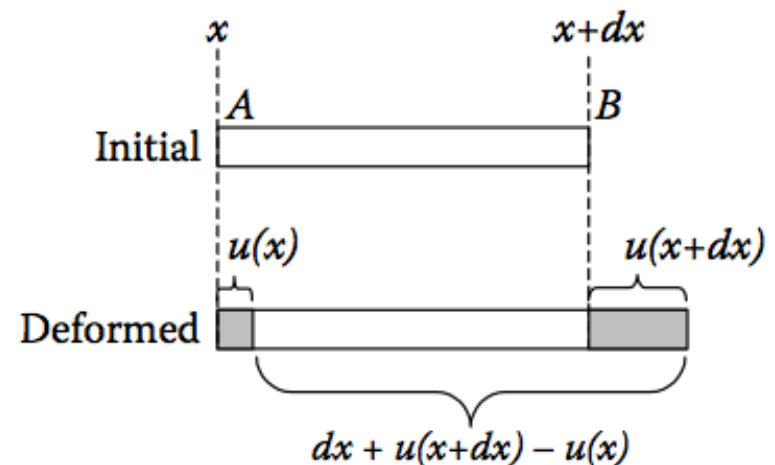
$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Dérivation de la déformation relative en 1 point en 1D

- **Déformation relative microscopique:** chaque section perpendiculaire à l'axe se déplace d'une distance $u(x)$ selon cet axe, due aux charges.

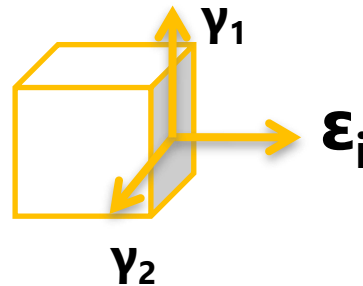
$$\epsilon = \frac{\text{change in length}}{\text{original length}} = \frac{[dx + u(x+dx) - u(x)] - dx}{dx}$$

développement série de Taylor de $u(x+dx)$:
1^{er} ordre = $u(x) + u'(x)dx$



$$\epsilon \cong \frac{[u(x) + u'(x)dx - u(x)]}{dx} = u'(x) = \frac{du}{dx}$$

- Dans des problèmes concrets, nous devons examiner les déformations relatives normales, ε , et en cisaillement, γ , dans de multiples directions
- Sur chaque facette d'un cube "virtuel", nous retrouvons une déformation relative normale et deux de cisaillement

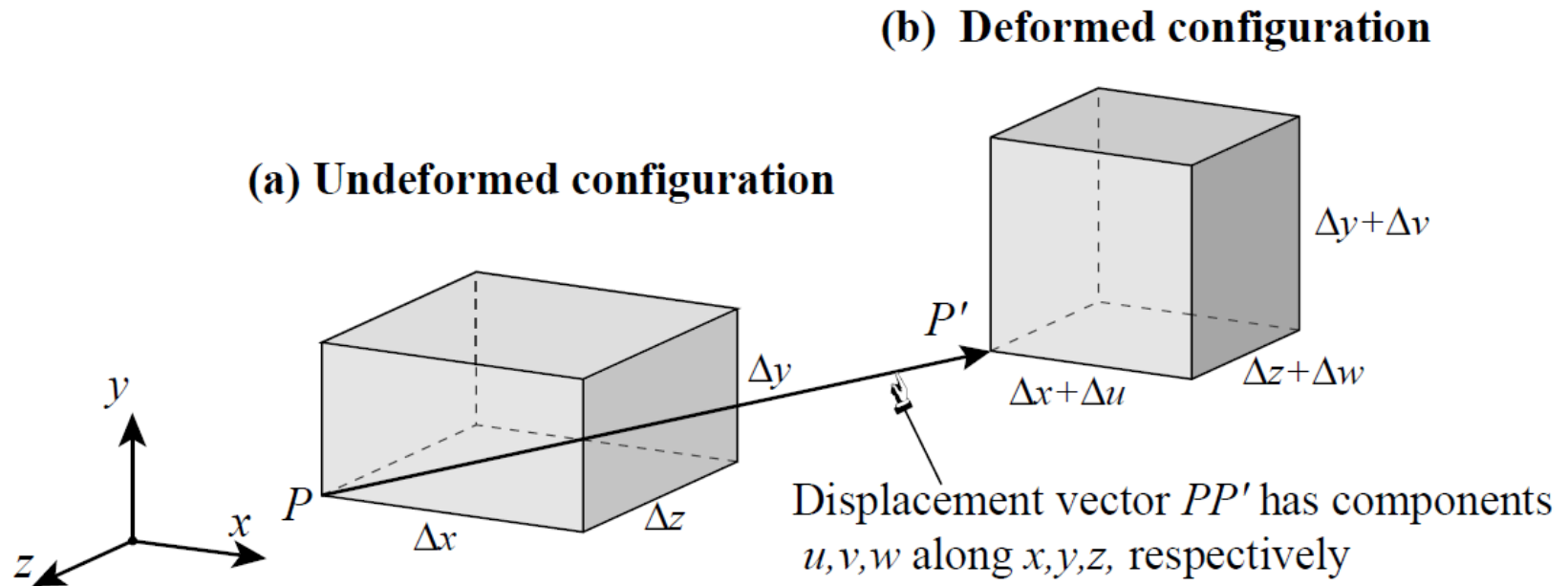


- En 3D (3 faces positives) cela résulte en **3 déformations relatives normales** et **6 déformations relatives en cisaillement**, qui peuvent être représentées sous forme de matrice

Déformation relative en 3D

Définition des déplacements en 3D

- Un objet est déformé et nous regardons au point P



u, v, w : champ de déplacement

$u(x, y, z)$: selon x

$v(x, y, z)$: selon y

$w(x, y, z)$: selon z

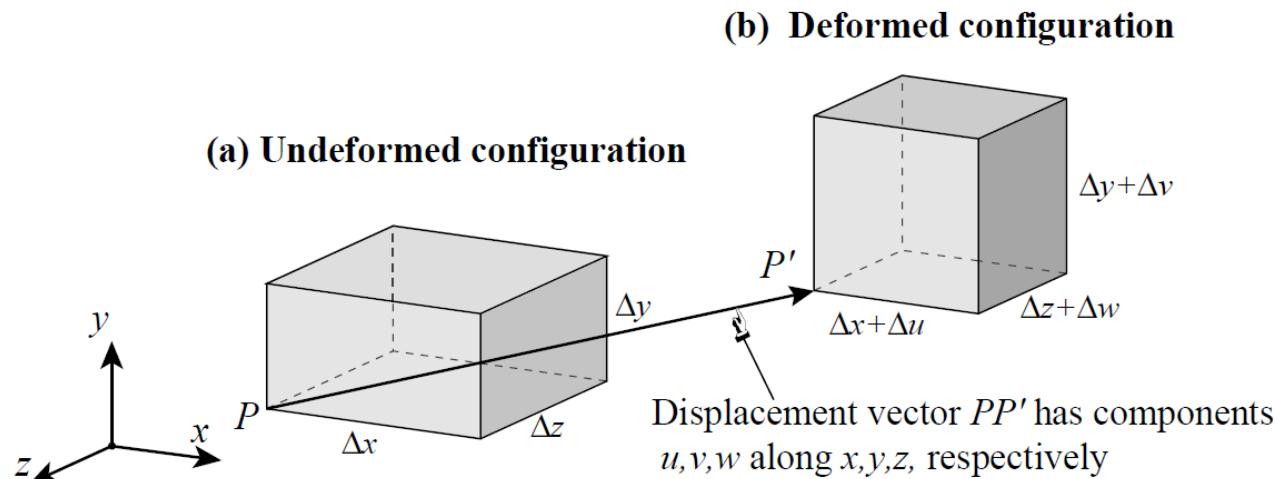
Déformation relative en 3D

Relation entre déplacement et déformation relative en un point

- Considérons un corps arbitraire en 3D dans sa configuration non-déformé et déformé
- Un point générique $\mathbf{P}(x,y,z)$ bouge en $\mathbf{P}'(x+u, y+v, z+w)$, pour lequel les composantes du déplacement sont fonction de la position:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,y,z), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z), \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}(x,y,z)$$

Les composantes u, v, w définissent un champ de déplacement.



Déformation relative normale en 3D

Relation entre déplacement et déformation relative en un point

- Le déplacement c'est le mouvement du point P . Etant intéressé par la déformation nous utilisons donc le **gradient de déplacement**: $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$
- L'équation en 1D se généralise: $\epsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$

La généralisation implique trois changements:

- Le point P est *abandonné* pour un point générique et arbitraire
- Les indices ' xx ' sont apparus pour identifier l'orientation des composantes de la déformation relative
- La dérivée ordinaire du/dx devient une *dérivée partielle*.

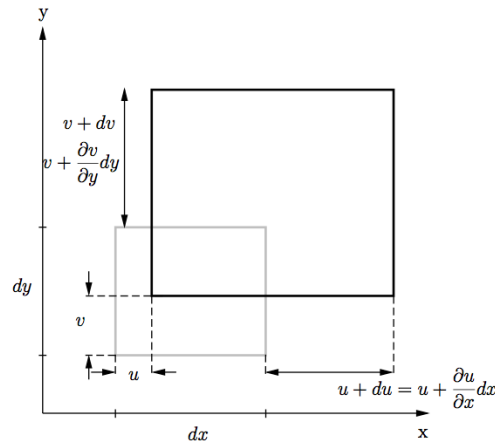
Déformation relative normale en 3D

Relation entre déplacement et déformation relative en un point

■ Nous pouvons définir 3 composantes normales:

$$\epsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

En 2D



$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

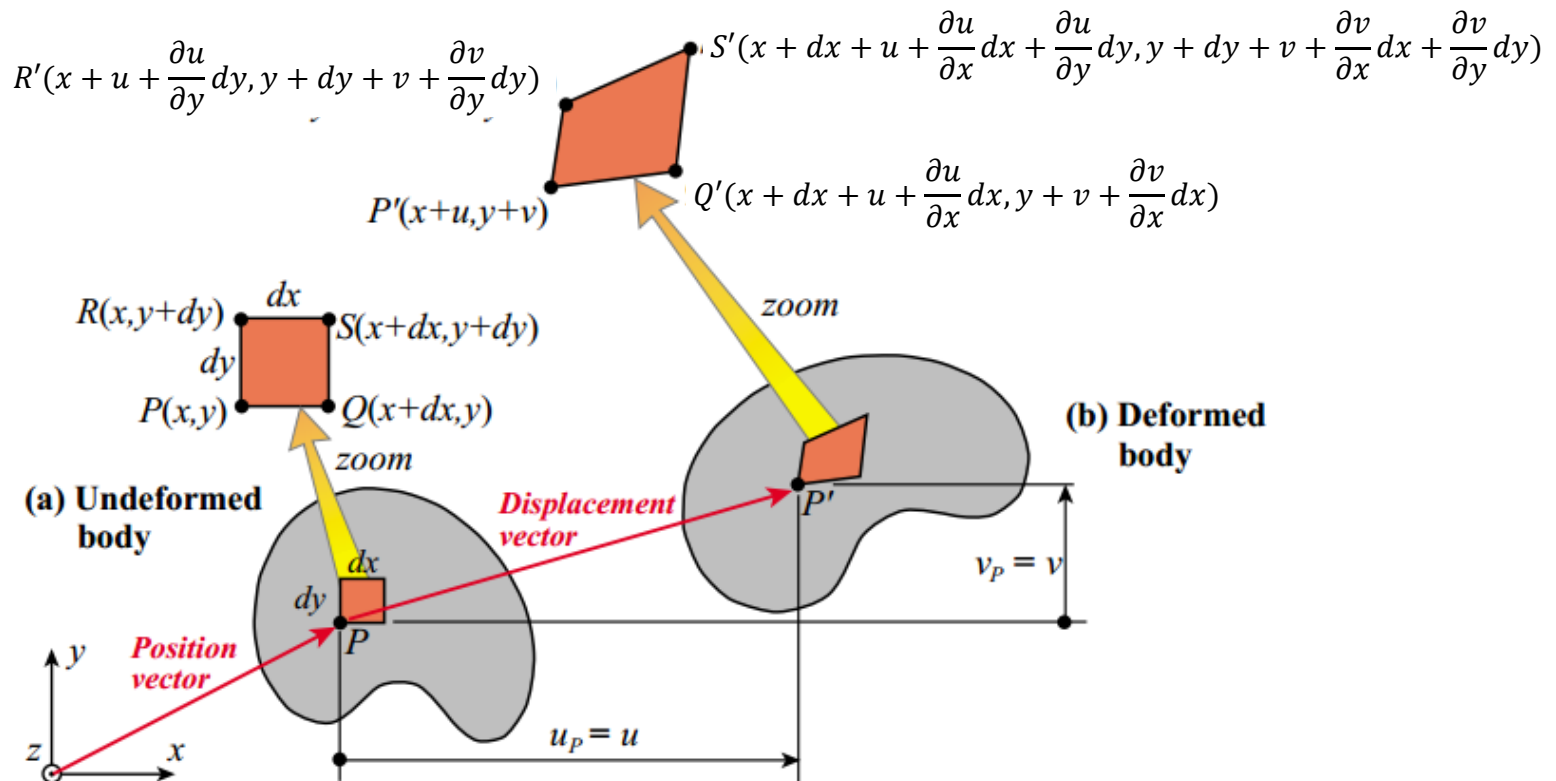
u, v, w: déplacements dans les directions x, y, z

- Les dérivées partielles sont un gradient de déplacement, une mesure de comment rapidement le déplacement change dans le matériau
- Elles sont les déformations relatives dans les directions x, y, z à (x,y,z)

Déformation relative normale en 3D

Relation entre déplacement et déformation relative en un point

- Visualisation en 2D par simplicité. Au point P, rectangle infinitésimal PQRS de dimensions $\{dx, dy\}$ aligné avec les axes $\{x, y\}$.



Connecting strains to displacements: 2D view used for visualization convenience.

Déformation relative normale en 3D

Relation entre déplacement et déformation relative en un point

- Expansion de Taylor du 1^{er} ordre, la position des coins de l'élément $\{dx, dy\}$ après déplacement est donnée par:

P maps to P' at $x + u, y + v$

Q maps to Q' at $x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad y + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$

R maps to R' at $x + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

S maps to S' at $x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

$$\epsilon_{xx} = \frac{u_{Q'} - u_{P'}}{dx} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - (u)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

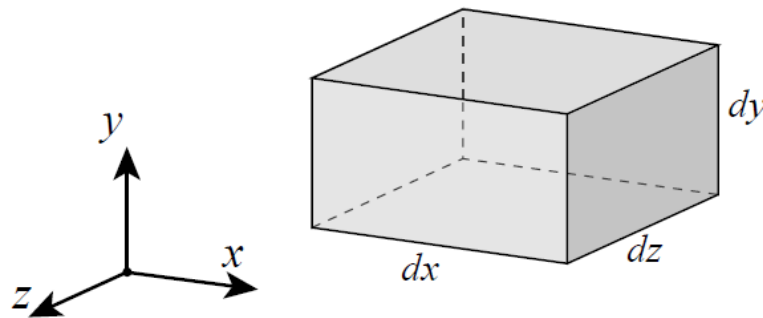
$$\epsilon_{yy} = \frac{v_{R'} - v_{P'}}{dy} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - (v)}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

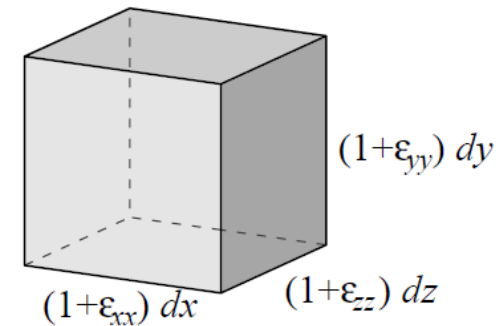
Déformation relative normale en 3D

Changement de volume en 3D

(a) Undeformed configuration



(b) Deformed configuration



- Les changements dans les 3 déformations relatives normales correspondent à un changement de la forme du parallépipède d'un volume initial $dx dy dz$
- Le changement de volume relatif est la somme des déformations relatives normales:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$$

Déformation relative de cisaillement 2D

Convention des signes

- Déformation géométrique en 2D d'un élément de matériau infinitésimal.

- **Déformation relative de cisaillement positive si l'angle diminue**

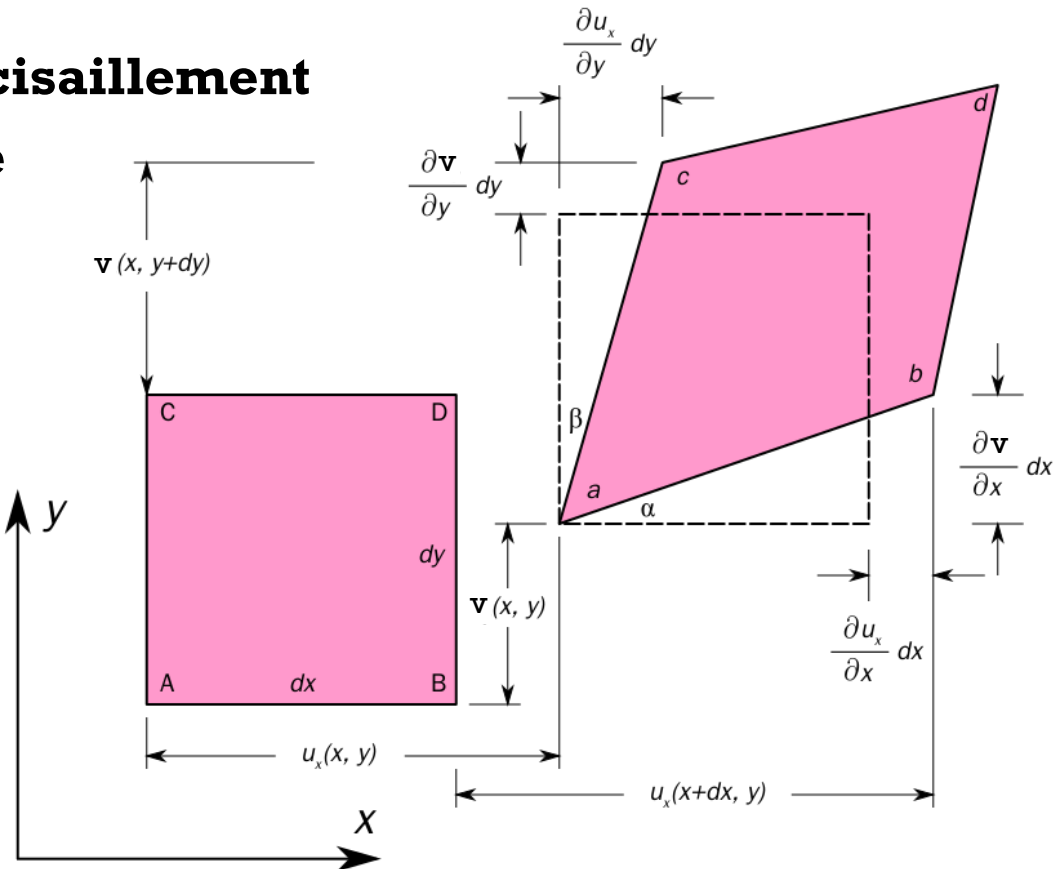
- Nouvel angle $\angle CAB$ est:

$$\pi/2 - \beta - \alpha$$

- **Déformation relative de cisaillement**

$$\gamma = \beta + \alpha$$

Calculer en **radian**



Déformation relative de cisaillement en 3D

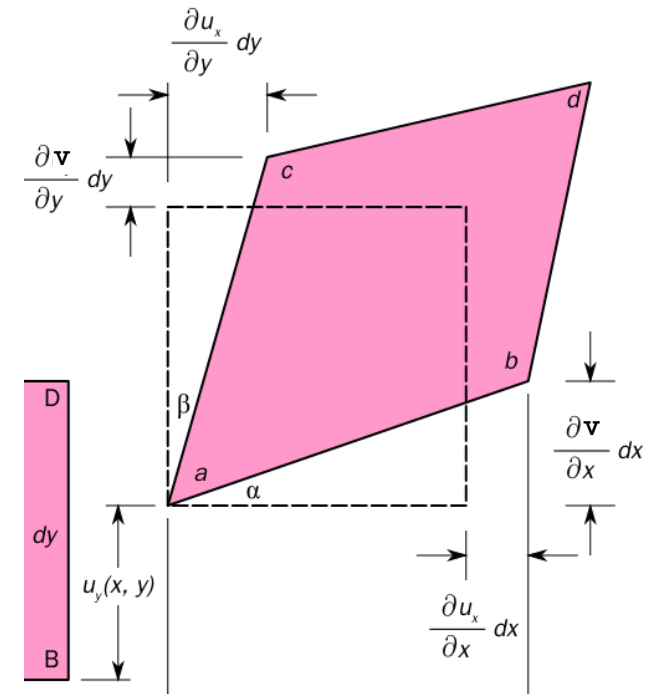
(γ) : changement dans l'angle original représenté par $\alpha + \beta$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} dx}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha$$

Petites déformations: $\ll dx$ or $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$

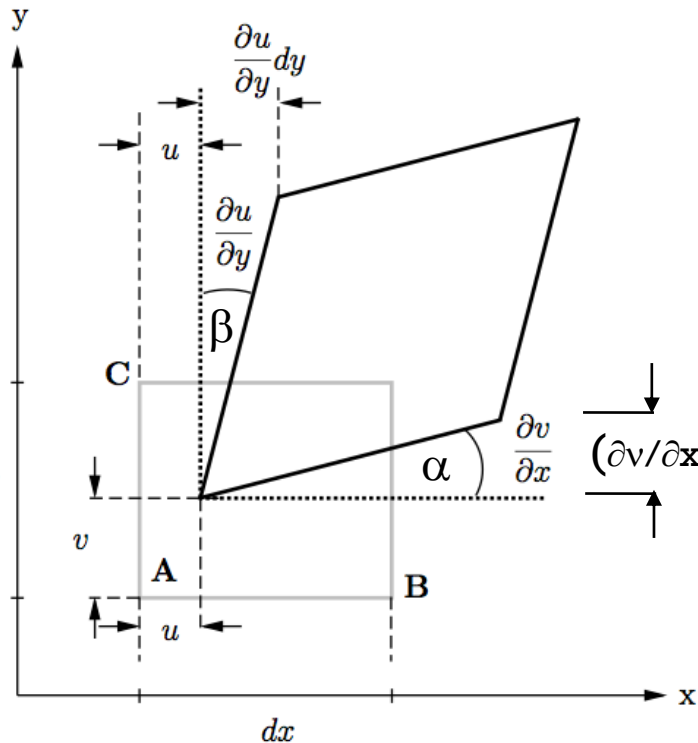
$$\tan \beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y} dy}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \beta$$

Petites déformations: $\ll dy$ or $\frac{\partial v}{\partial y} \ll 1$



$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Déformation relative de cisaillement en 3D



Angle de la ligne initialement horizontale est $\frac{\partial v}{\partial x}$

Angle de la ligne initialement verticale est $\frac{\partial u}{\partial y}$

Changement dans l'angle droit, la déformation relative de cisaillement est:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

De la symétrie et par extrapolation en 3D:

Déformation relative de cisaillement(γ):
Changement de l'angle original
représenté par $\alpha + \beta$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Matrice de déformations relatives

Tenseur de déformations relatives

La **théorie de la déformation relative infinitésimale** est une approche mathématique de la description de la déformation d'un corps solide dans laquelle les déplacements des particules matérielles sont beaucoup plus petits que ses dimensions.

Utilisation de la notion que la **déformation relative peut également être définie comme le déplacement relatif de deux points** l'un par rapport à l'autre

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)$$

$$\mathbf{u}_i \in \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$$

$$\mathbf{x}_i \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Matrice de déformations relatives

Nomenclature du tenseur mathématique

- 9 composantes de la déformation relative dans une matrice

Exemple: ε_{xx} représente la magnitude de la déformation dans la direction des x , relative à une longueur de référence aussi en x .

- Pour avoir la matrice de déformation relative se comportant mathématiquement comme un tenseur, **les composantes en cisaillement de la matrice sont définies comme étant la MOITIÉ de la déformation relative en ingénierie.**

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)$$

$$u_i \in \{u, v, w\}$$

$$x_i \in \{x, y, z\}$$

$$i = 1, 2, 3$$

- Cette équation définit 6 composantes indépendantes d'une matrice symétrique ($x_i \in \{x, y, z\}$, $u_i \in \{u, v, w\}$)

Matrice de déformations relatives

Nomenclature du tenseur mathématique

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)$$

$$\mathbf{u}_i \in \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$$

$$\mathbf{x}_i \in \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \equiv \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \equiv \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \equiv \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \equiv \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \equiv \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \equiv \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

!

**Déformation relative de
cisaillement en ingénierie**

!

Matrice de déformations relatives

d'Ingénierie

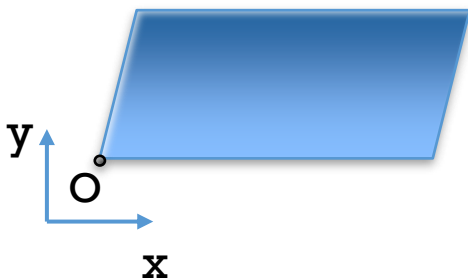
$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{\text{eng}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Cisaillement positif ou négatif ?

- A. Positif
- B. Négatif
- C. Pas de cisaillement
- D. Données insuffisantes

Etat initial

Etat final



Déformation relative de cisaillement en ingénierie

Quelle est la déformation relative de cisaillement en xz, γ_{xz} ?

- A. 0.975
- B. 1.95
- C. 3.9
- D. 4

Matrice de déformations relatives

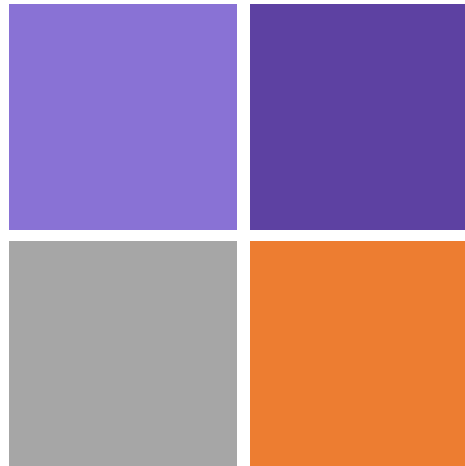
$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 4 & \epsilon_{xy} & 1.95 \\ \epsilon_{xy} & -0.75 & 0 \\ 1.95 & 0 & -1.4 \end{pmatrix}$$



Semaine 2

Partie III:

Loi de Hooke en 3D



1. Loi de Hooke
2. Effet de Poisson
3. Loi de Hooke généralisée
4. Matrices de rigidité et de souplesse
5. Résumé

Relation Contrainte – Déformation relative

Contrainte et Déformation relative sont proportionnelles

$$\sigma \propto \varepsilon$$

- **Loi de Hooke pour contrainte normale:**

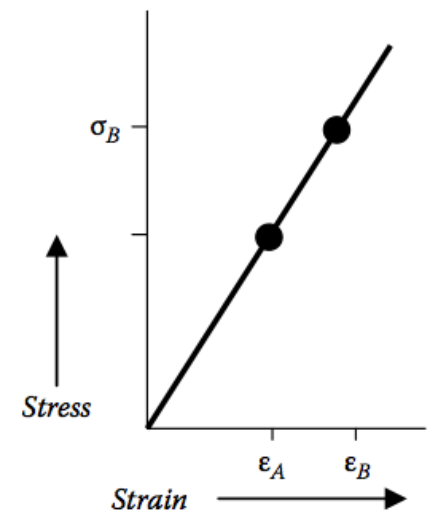
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

E (Pa) = “Module de Young” ou “Module d’élasticité”

- **Loi de Hooke pour contrainte en cisaillement:**

G (Pa) = “Module de cisaillement” ou
“Module de rigidité”

$$\tau = G \cdot \gamma$$



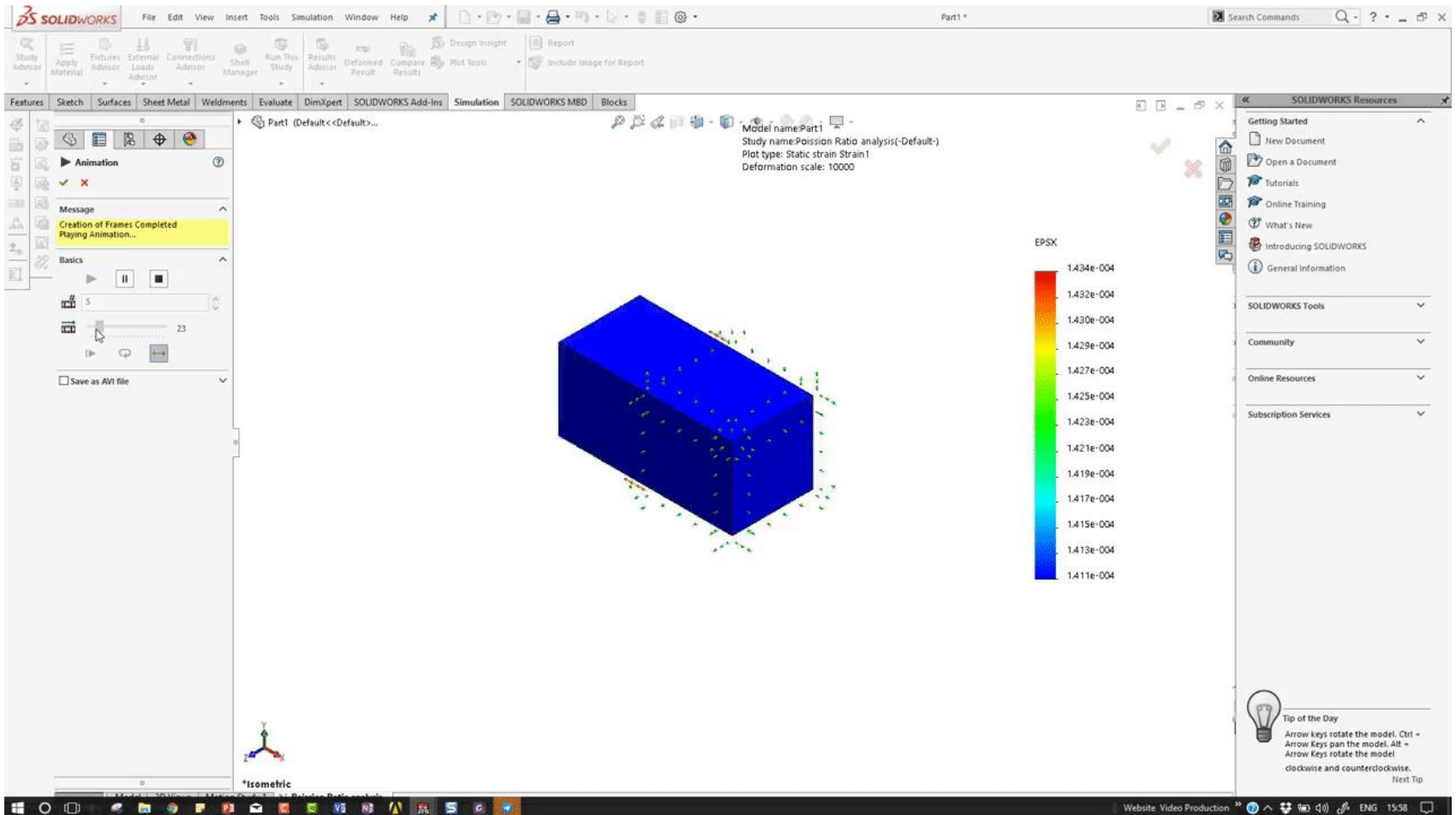
Assomptions pour une forme simple de la loi de Hooke

- Le matériau est **homogène**: E et G ne varient pas d'un point à un autre
- Le matériau est **isotropique**: E et G ne varient pour n'importe quelle rotation du système de coordonnées
- Il n'y a **pas d'effet de la température** sur les propriétés mécaniques de E et G

Loi de Hooke en 3D

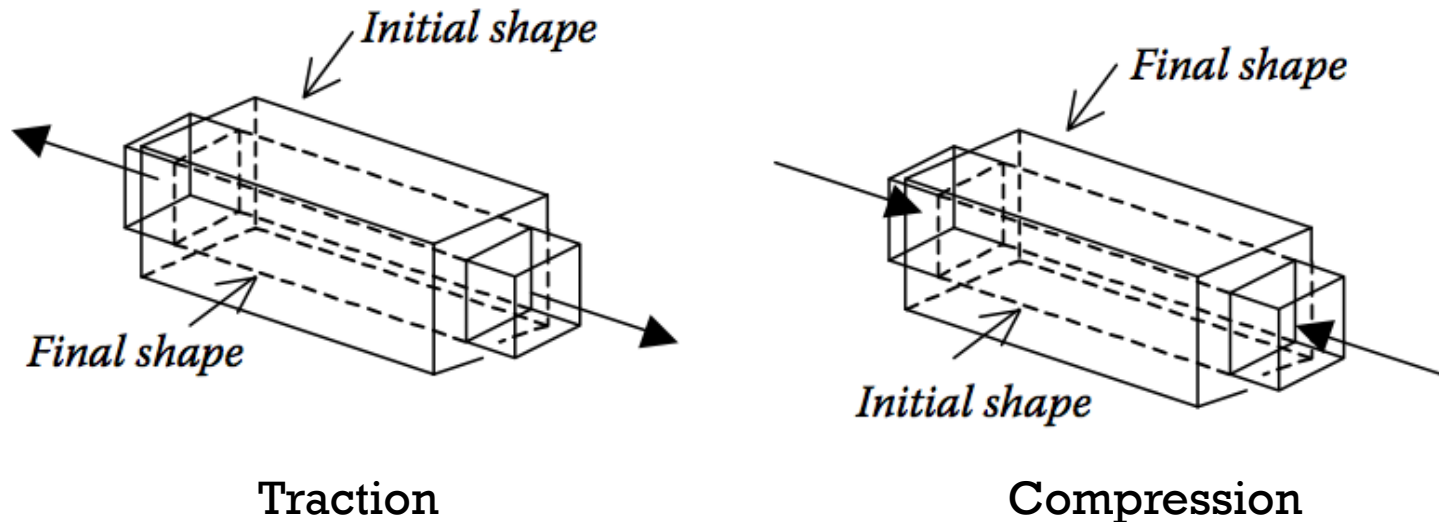
$$[\boldsymbol{\sigma}] = [\mathbf{E}] [\boldsymbol{\varepsilon}]$$

L'effet de Poisson en déformation relative



L'effet de Poisson en déformation relative

- Une déformation relative *axiale* dans une direction induit aussi une déformation relative *latérale* dans les deux directions perpendiculaires



- Souvent négligée dans les problèmes d'ingénierie, vous rappeler que ce phénomène physique peut avoir son importance dans certains cas

L'effet de Poisson en déformation relative

- La déformation relative latérale peut être décrite par *l'équation de Poisson*

$$\nu := \left| \frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}} \right| = \text{Poisson ratio} \quad (\text{sans dimension})$$

Déformation relative latérale = $-\nu \cdot$ Déformation relative axiale

- Le coefficient de Poisson 'v' est une propriété du matériau et est de l'ordre de 0.25-0.35 pour la majorité (0.1-0.5)
- Pour les matériaux obéissant à la loi de Hooke, le *coefficient de Poisson* relie le *module de Young E* et celui de *rigidité G*:

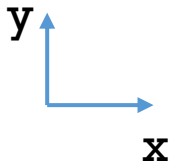
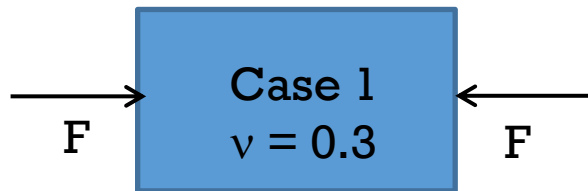
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- **IMPORTANT:** L'effet de Poisson ne cause pas de contraintes additionnelles dans le matériau, sauf si le déplacement latéral est restreint

Y a-t-il une Déformation relative et / ou une Contrainte en y ?

Case 1

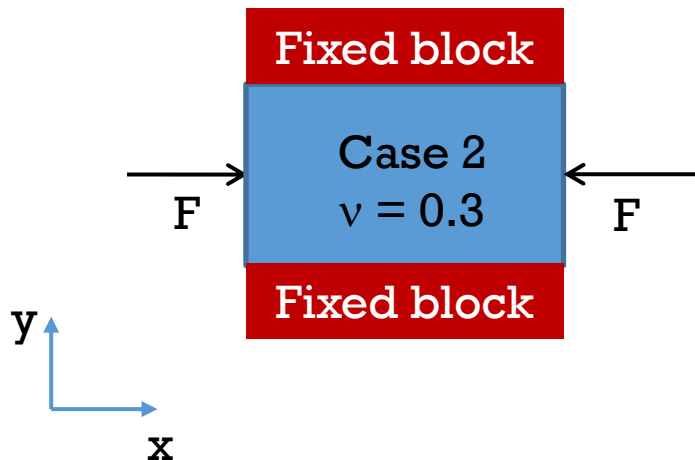
- A. Déformation relative
- B. Contrainte
- C. Déf. relative + Contrainte
- D. Aucune de ces réponses



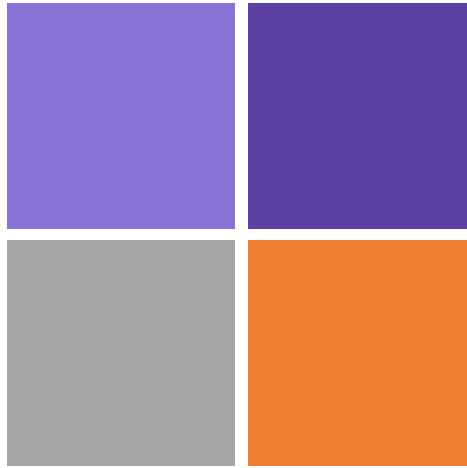
Y a-t-il une Déformation relative et / ou une Contrainte en y ?

Case 2

- A. Déformation relative
- B. Contrainte
- C. Déf. relative + Contrainte
- D. Aucune de ces réponses



Loi de Hooke généralisée



Loi de Hooke généralisée

- En 1D, la loi de Hooke a la forme de :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$

- En 3D, la loi de Hooke a la forme de :

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$

- C_{ijkl} est la matrice de rigidité
- C_{ijkl}^{-1} est la matrice de souplesse
- Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité est un tenseur 3x3x3x3 (tenseur de 4eme ordre) et possède 81 composantes !

Loi de Hooke généralisée

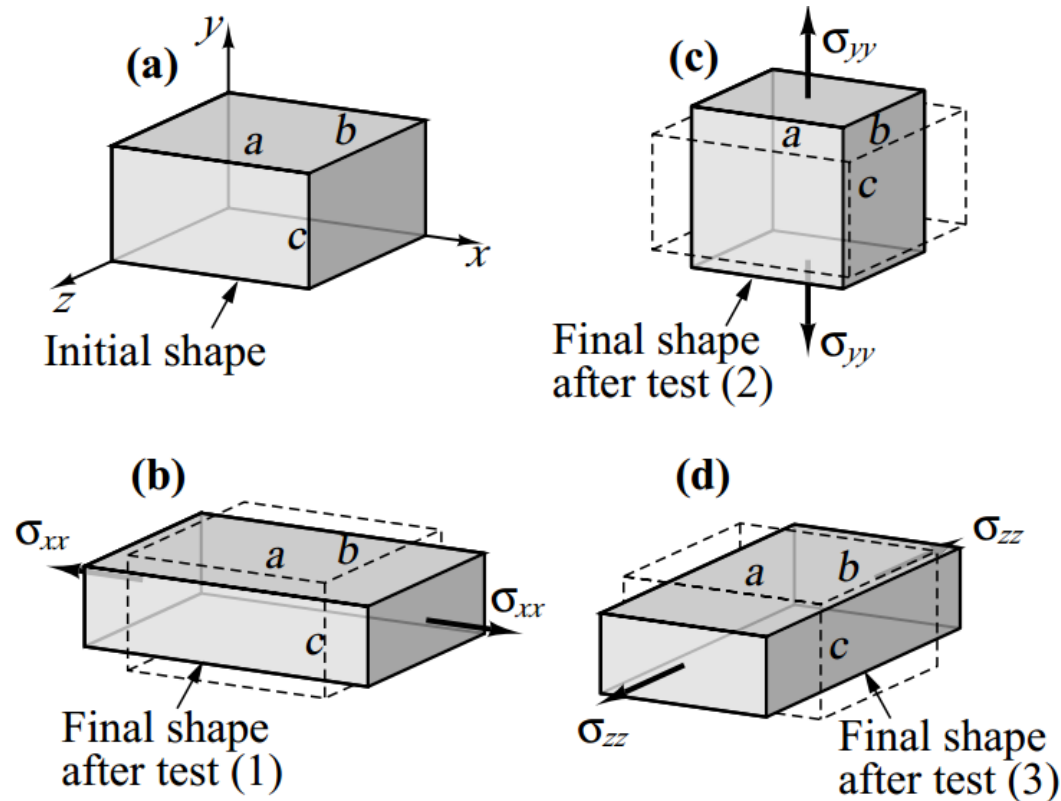
Simplification de la matrice de rigidité

Forme mathématique générale	81 composantes indépendantes	
En prenant compte la symétrie de τ et ε	36 composantes indépendantes	
Symétrie due à l'existence de l'énergie de déformation relative U_0	21 composantes indépendantes	Cas général pour une élasticité anisotrope
Cas isotropique: C_{ijkl} est invariable en rotation selon les axes de coordonnées	2 composantes indépendantes	Cas pour les matériaux isotropes: Matériaux qui ont le même E et G dans toutes les directions

Loi de Hooke généralisée

Pour les cas isotropiques

■ Dérivation de la loi de Hooke généralisée en 3D



Derivation of three-dimensional Generalized Hooke's Law for normal stresses and strains. Three tension tests are assumed to be carried out along $\{x, y, z\}$, respectively, and strains superposed.

Loi de Hooke généralisée

Pour les cas isotropiques

- Trois tests de “traction” effectués selon x, y, z, respectivement
- L'application de σ_{xx} selon ‘x’ va produire ces déformations relatives normales

$$\epsilon_{xx}^{(1)} = \frac{\sigma_{xx}}{E}, \quad \epsilon_{yy}^{(1)} = -\frac{\nu \sigma_{xx}}{E}, \quad \epsilon_{zz}^{(1)} = -\frac{\nu \sigma_{xx}}{E}$$

- Puis σ_{yy} selon ‘y’ va produire ces déformations relatives normales

$$\epsilon_{yy}^{(2)} = \frac{\sigma_{yy}}{E}, \quad \epsilon_{xx}^{(2)} = -\frac{\nu \sigma_{yy}}{E}, \quad \epsilon_{zz}^{(2)} = -\frac{\nu \sigma_{yy}}{E}$$

- Finalement, σ_{zz} selon ‘z’ va produire ces déformations relatives normales

$$\epsilon_{zz}^{(3)} = \frac{\sigma_{zz}}{E}, \quad \epsilon_{xx}^{(3)} = -\frac{\nu \sigma_{zz}}{E}, \quad \epsilon_{yy}^{(3)} = -\frac{\nu \sigma_{zz}}{E}$$

Loi de Hooke généralisée

Pour les cas isotropiques

- Le cube est soumis à une combinaison de contraintes normales.
- Le matériau ayant un comportement élastique linéaire, la combinaison des déformations relatives peut-être obtenue par **superposition**.

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \epsilon_{xx}^{(1)} + \epsilon_{xx}^{(2)} + \epsilon_{xx}^{(3)} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu \sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu \sigma_{zz}}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} - \nu \sigma_{zz}) \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{yy}^{(1)} + \epsilon_{yy}^{(2)} + \epsilon_{yy}^{(3)} = -\frac{\nu \sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu \sigma_{zz}}{E} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu \sigma_{zz}) \\ \epsilon_{zz} &= \epsilon_{zz}^{(1)} + \epsilon_{zz}^{(2)} + \epsilon_{zz}^{(3)} = -\frac{\nu \sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu \sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\end{aligned}$$

- En cisaillement, contraintes et déformations relatives peuvent être reliées par le module de cisaillement:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_{yx}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{\tau_{zy}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

Loi de Hooke généralisée

Pour les cas isotropiques

- Pour des matériaux homogènes isotropiques, nous pouvons écrire la loi de Hooke pour les contraintes normales et de cisaillement:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \cdot \sigma_{yy} - \nu \cdot \sigma_{zz}) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (-\nu \cdot \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu \cdot \sigma_{zz}) & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (-\nu \cdot \sigma_{xx} - \nu \cdot \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}$$

- Etant donné que E et G sont reliés au travers de 'ν', il y a 2 propriétés indépendantes des matériaux dans ces équations (E et ν).

$$\boxed{E = 2G(1+\nu) \quad G = E / (2(1+\nu)) \quad \nu = E / (2G) - 1}$$

Loi de Hooke généralisée

Forme complète matériaux homogènes isotropes

Relations Contraintes à Déformations relatives

Matrice de souplesse

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}}_{\text{Vecteur Déformations relatives}} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\sigma} \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}}_{\text{Vecteur Contraintes}}$$

$$(2(1+\nu)) = E / G$$

Loi de Hooke généralisée

Forme complète matériaux homogènes isotropes

Relations Déformations relatives à Contraintes

(en inversant l'équation)

Matrice de Rigidité

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \hat{E}(1-\nu) & \hat{E}\nu & \hat{E}\nu & 0 & 0 & 0 \\ \hat{E}\nu & \hat{E}(1-\nu) & \hat{E}\nu & 0 & 0 & 0 \\ \hat{E}\nu & \hat{E}\nu & \hat{E}(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \hat{\epsilon}$$

\hat{E} is an “effective” modulus modified by Poisson’s ratio:

$$\hat{E} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

Loi de Hooke généralisée

Forme complète matériaux homogènes isotropes

Déformations relatives à Contraintes, les 6 relations:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \left[(1 - \nu) \epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{zz} \right],$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \left[\nu \epsilon_{xx} + (1 - \nu) \epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{zz} \right],$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \left[\nu \epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy} + (1 - \nu) \epsilon_{zz} \right],$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}.$$

Loi de Hooke généralisée

Contrainte moyenne et changement de volume

- La contrainte moyenne peut être exprimée par

$$\sigma_{av} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

- De la définition de la déformation relative infinitésimale, le changement de volume / la déformation relative volumétrique / la dilation peuvent être calculés

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \\ &= \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ K = \frac{E}{1 - 2\nu} &= \frac{1}{K}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \end{aligned}$$

K est le module en volume du matériau. Il peut être calculé à partir des 2 composantes indépendantes E and ν .

Résumé Parties II et III

Déformations relatives

- Matrice des déformations relatives en 3D incluant les composantes normales et de cisaillement

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)$$

- Effet de Poisson

$$\nu := \left| \frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}} \right| = \text{Poisson ratio} \quad (\text{sans dimension})$$

$$\text{lateral strain} = -\nu \cdot \text{axial strain}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Résumé Parties II et III

- **Loi de Hooke pour les contraintes normales:**

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

E (Pa) = “Module de Young” ou “Module d’Elasticité”

- **Loi de Hooke pour les contraintes de cisaillement:**

$$\tau = G \cdot \gamma$$

G (Pa) = “Module de Cisaillement” ou “Module de Rigidité”

- **Loi de Hooke généralisée**

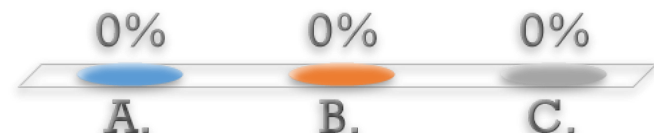
$$(2(1+\nu)) = E / G$$

Matrice de Souplesse

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

Est-ce que l'on peut définir un matériau *incompressible*?

- A. Oui, un matériau très rigide (très grand E)
- B. Non, tous les matériaux changent de volume quand des forces externes sont appliquées
- C. Oui, cela depend de ν (effet de Poisson)



- Pour avoir un matériau incompressible, la condition est

$$\Delta V = 0$$

- Nous pouvons écrire:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\nu = 0.5 \rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 0$$

Déformation relative dans un Cube

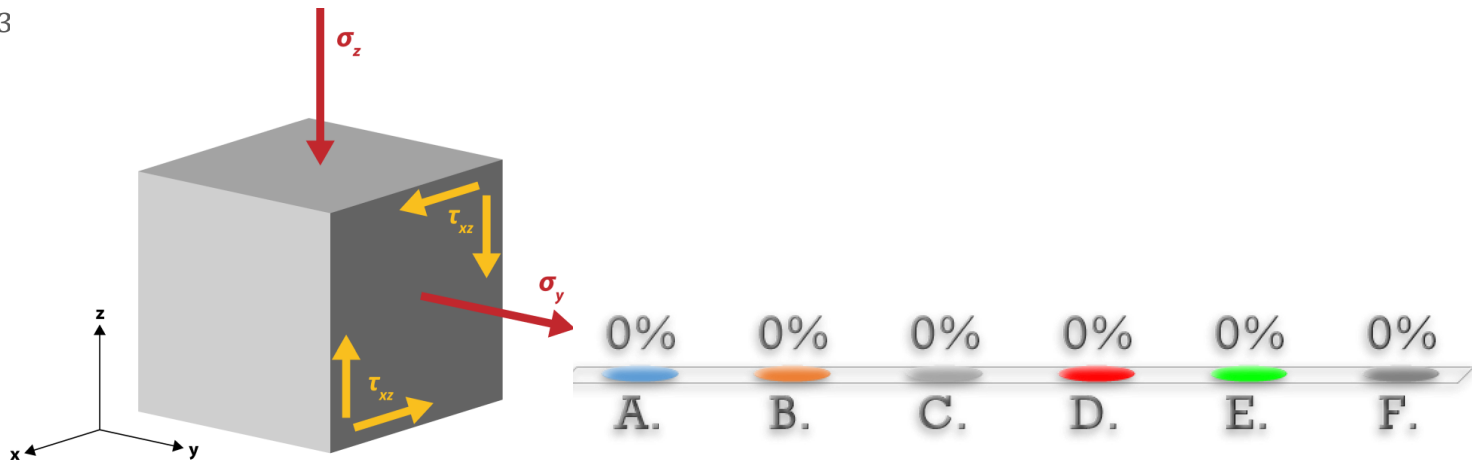
σ_z compressif à 200 MPa, σ_y en tension à 300 MPa. Contrainte de cisaillement τ_{xz} de 50 MPa.

Les autres composantes de la matrice de contraintes sont nulles.

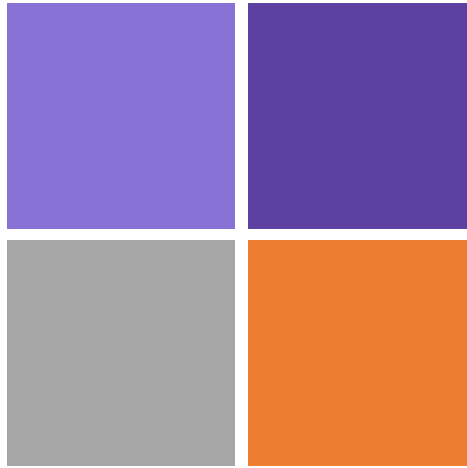
Poisson's ratio $\nu = 0.25$, $E = 5$ GPa, $G = 2$ GPa.

Quelle est la déformation relative ε_{xx} selon l'axe des x ?

- A. $10 \cdot 10^{-3}$
- B. $-10 \cdot 10^{-3}$
- C. $5 \cdot 10^{-3}$
- D. $-5 \cdot 10^{-3}$
- E. $15 \cdot 10^{-3}$
- F. $-15 \cdot 10^{-3}$



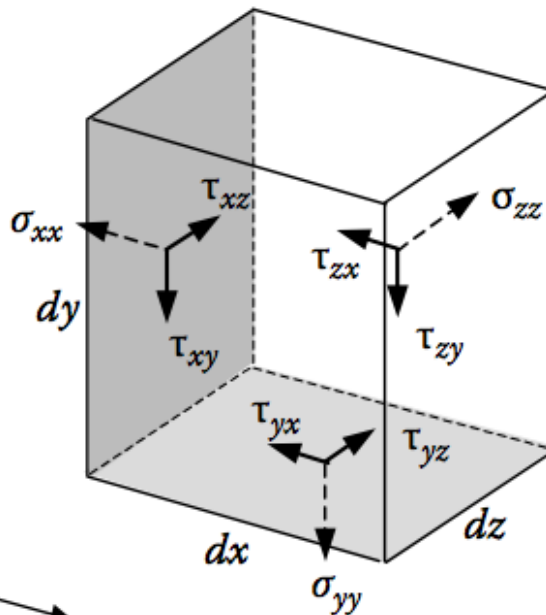
Equilibre en 3D



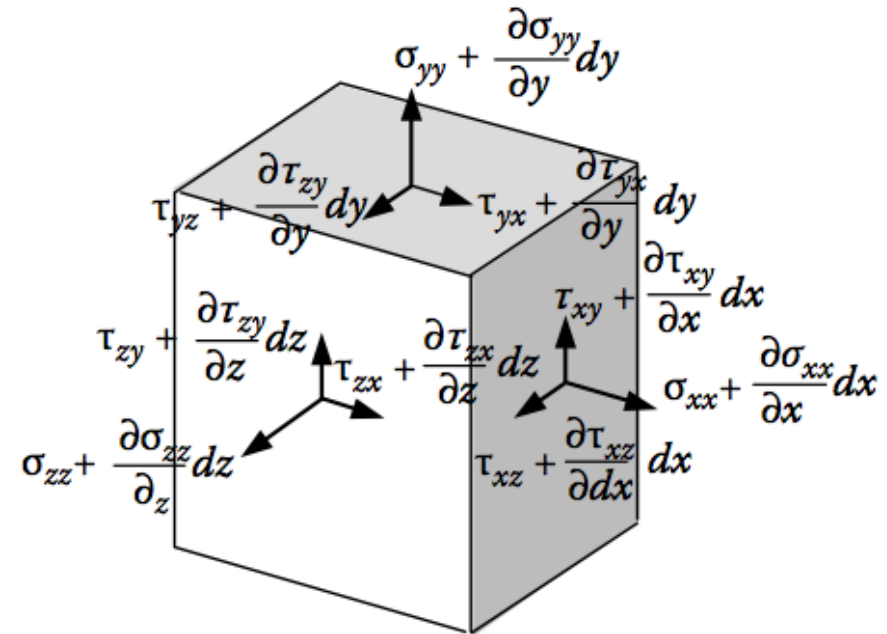
Equilibre en 3D

Equation microscopique d'équilibre

- On commence par définir les équations microscopiques d'équilibre.
- Rappel: 1^{er} indice dénote le vecteur normal du plan, 2^{ème} indice représente la direction du vector de force.



Composantes des contraintes sur les faces de gauche, de dessous et arrières



Composantes des contraintes sur les faces droite, du dessus et avant

Equilibre en 3D

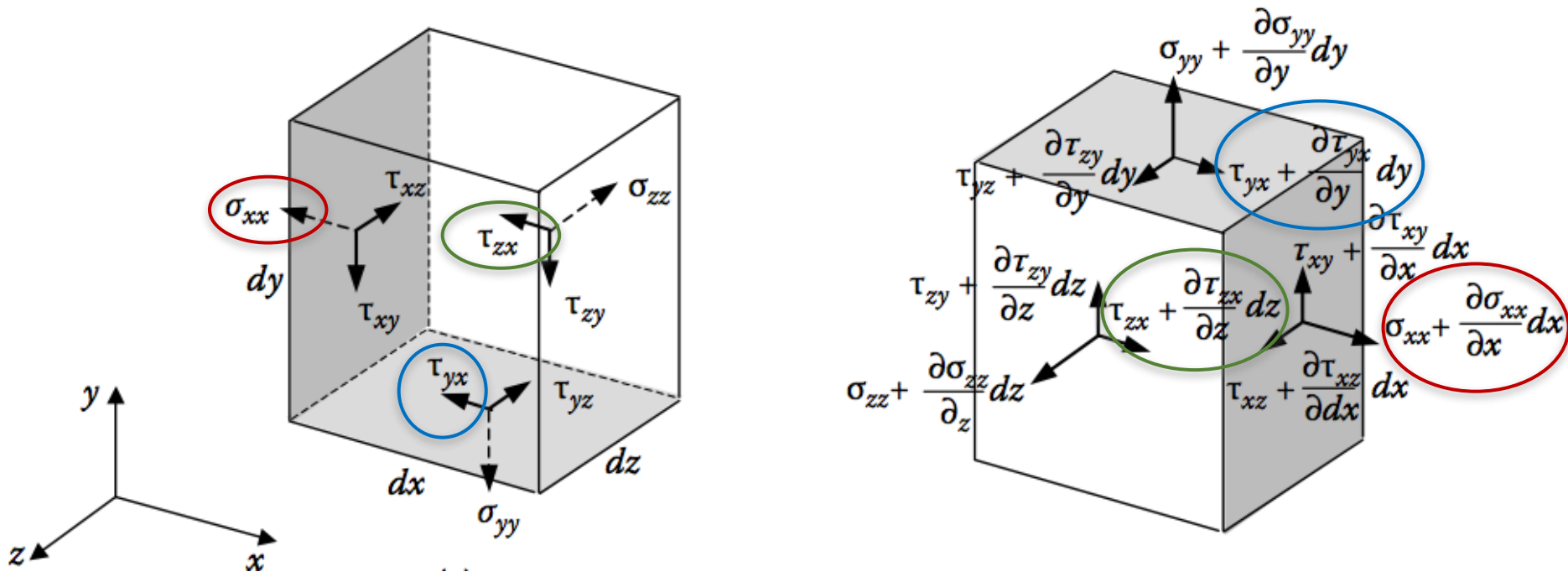
Equation microscopique d'équilibre

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx - \sigma_{xx} \right) dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy - \tau_{xy} \right) dx dz +$$

$$+ \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz - \tau_{xz} \right) dx dy + B_x dx dy dz = 0 \quad B_x : \text{Force en volume (N/m}^3\text{)}$$

(i.e. gravité)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + B_x = 0$$



Equilibre en 3D

Somme de toutes les forces

- Les forces dans la direction-x proviennent des contraintes sur CHACUNE des six faces
- Somme de tous les éléments qui agissent selon x, y et z:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x = 0$$

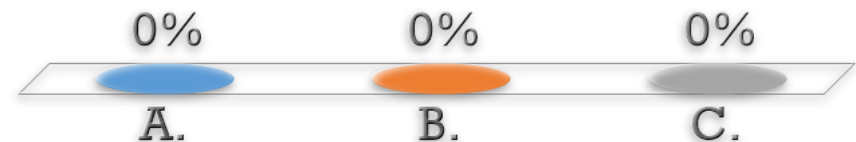
$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + B_z = 0$$

- Ce sont les 3 équations d'équilibre

Après l'équilibre des forces, d'autres équilibres nécessaires ?

- A. Oui, nous devons considérer les Moments
- B. Non, les Forces suffisent
- C. Il n'y a pas de Moments resultants dans ce cas



Equilibre en 3D

Notation indicielle

- Ces 3 équations peuvent être réduite à une avec une notation indicielle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &:= \left(\right)_{,i} & \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} &:= \left(\right)_{,ii} := \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} & \mathbf{y} = \mathbf{x}_2 \\ & & \mathbf{z} = \mathbf{x}_3 \\ \left(\right)_{i,i} &= \frac{\partial(\)_i}{\partial x_i} := \sum_i \frac{\partial(\)_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

- Nous pouvons écrire les 3 équations d'équilibre sous la forme:

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + B_z &= 0\end{aligned}$$

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

Équation d'équilibre

Équation constitutive

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{l,k} + u_{k,l}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)$$

Équation cinématique

Quiz Session: micro200



- Durant les séances d'exercices en classe
- Par courriel: danick.briand@epfl.ch